

Intégration

Problème 1. Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt$.

1. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
2. Sans utiliser de dérivée, montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que si x et y sont dans $\mathbb{R}^+$ avec $x \leq y$, alors : $0 \leq \varphi(y) - \varphi(x) \leq \int_0^1 (t^x - t^y) dt \leq y - x$.
4. En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
5. Montrer que pour $x \geq 0$, on a : $1 - \varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt$.
6. En majorant l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t^x} dt$, en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$.
7. (a) Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on introduit f_x la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_x(t) = \frac{1}{1+t^x}$.
 - i. Montrer que la fonction f_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$.
 - ii. Pour quelles valeurs de x la fonction f_x est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 ?
- (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour $x \geq 0$: $\varphi(x) = \frac{1}{2} + x \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt$.
8. (a) Exprimer $\int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt$ sous la forme d'une combinaison linéaire de $\varphi(x)$ et $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^x)^2} dx$.
- (b) Montrer alors que : $\int_0^1 \frac{t^x}{4} dt \leq \int_0^1 \frac{t^x}{(1+t^x)^2} dt \leq \varphi(x) - \frac{1}{4}$.
- (c) Déterminer la pente de la demi-tangente au point d'abscisse 0 pour la courbe représentant φ .
9. Esquisser l'allure de la courbe représentative de φ sur $[0, +\infty[$.
10. (a) Sans étudier les variations d'une fonction auxiliaire, montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+x) \leq x$.
- (b) En utilisant l'expression de la question 5) et une intégration par parties, trouver un équivalent de $\varphi(x) - 1$ au voisinage de $+\infty$.

