**Lycée Gustave Eiffel** Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 DM n°1
Rendu le 7 octobre 2011

## Exercice 1 : Une équation de degré 3

1. D'après les relations coefficients-racines, $u$ et $v$ sont solutions de $(S)$ si, et seulement si, ils sont les racines de $X^2 - zX - 2$. Puisque tout polynôme complexe de degré 2 admet deux solutions (éventuellement égales), le système $(S)$ admet une solution.

Il existe donc $u$ et $v$ deux nombres complexes tel que :

$$\begin{cases} u+v=z \\ uv=-2 \end{cases} \qquad (S)$$

2. (a) On a : $z^3+6z-2 = (u+v)^3+6(u+v)-2$

$$\begin{aligned} &= u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+6(u+v)-2 \\ &= u^3+3(u+v)uv+v^3+6(u+v)-2 \\ &= u^3+v^3-6(u+v)+6(u+v)-2 \qquad (uv=-2) \\ &= u^3+v^3-2 \end{aligned}$$

Puisque $z^3+6z-2=0$, on en déduit : $\boxed{u^3+v^3=2}$

(b) On a : $u^3v^3=(uv)^3=(-2)^3=-8$.

Par les relations coefficients racines, $u^3$ et $v^3$ sont les racines du polynôme $X^2-2X-8$.

(c) On a : $X^2-2X-8=(X+2)(X-4)$.
Les racines de $X^2-2X-8$ sont $-2$ et $4$.
Or : $|u|<|v|$.
Donc : $|u|^3<|v|^3$.
D'où : $\boxed{u^3=-2 \text{ et } v^3=4}$

(d) On a : $u^3=2$.
Donc : $u=-\sqrt[3]{2}$ ou $u=-\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ ou $u=-\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}$.
Or $uv=-2$.
D'où : $v=-\dfrac{2}{u}$.
Or : $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4}$, $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}}=\sqrt[3]{4}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et : $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}}=\sqrt[3]{4}\mathrm{e}^{-\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}$.
Les trois valeurs possibles pour le couple $(u,v)$ sont :

$$(-\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}),\ (-\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}},\sqrt[3]{4}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}) \text{ et } (-\sqrt[3]{2}\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}},\sqrt[3]{4}\mathrm{e}^{-\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}})$$

(e) Remarquons que $j=j^4=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}=\mathrm{e}^{-\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $j^2=\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}=\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$. Ainsi, les valeurs possibles pour le couple $(u,v)$ sont : $(-\sqrt[3]{2}j^0,\sqrt[3]{4}j^0)$, $(-\sqrt[3]{2}j^2,\sqrt[3]{4}j^1)$ et $(-\sqrt[3]{2}j^4,\sqrt[3]{4}j^2)$.
Puisque $z=u+v$, les valeurs possibles pour $z$ sont donc : $\sqrt[3]{4}j^0-\sqrt[3]{2}j^0$, $\sqrt[3]{4}j^1-\sqrt[3]{2}j^4$ et $\sqrt[3]{4}j^2-\sqrt[3]{2}j^4$.

Il existe donc $k\in\{0,1,2\}$ tel que : $z=j^k\sqrt[3]{4}-j^{2k}\sqrt[3]{2}$.

3. On a : $j=j^4=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
et : $j^2=\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc, les solutions de $(E)$ sont : $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$,
$j\sqrt[3]{4}-j^2\sqrt[3]{2}=\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}$
et $j^2\sqrt[3]{4}-j^4\sqrt[3]{2}=\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}\dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}{2}$.

## Exercice 2 : Étude d'une somme

1. On a : $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\mathrm{Re}\left(e^{2ikx}\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\left(-e^{2ix}\right)^k\right)$

On pose : $S'=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}\left(-e^{2ix}\right)^k$.

On a : $-e^{2ix}=1 \iff 2x=\pi[2\pi] \iff x=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

On traite deux cas :

(a) Si $x\neq\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ :

On a alors : $$S'=\frac{1-(-e^{2ix})^{2n}}{1+e^{2ix}}=\frac{1-e^{4nix}}{1+e^{2ix}} = \frac{e^{2inx}(e^{-2inx}-e^{2inx})}{e^{ix}(e^{-ix}+e^{ix})}=\frac{-2i\sin(2nx)}{2\cos(x)}e^{(2n-1)ix}$$

Donc : $S=\mathrm{Re}(S')=\dfrac{\sin\left((2n-1)x\right)\sin(2nx)}{\cos(x)}$.

(b) Si $x=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ : On a alors : $S'=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}1=2n$.

Donc : $S=\mathrm{Re}(S')=2n$.

On en déduit : $\boxed{S = \begin{cases} \dfrac{\sin(2nx)\sin\big((2n-1)x\big)}{\cos(x)} & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi] \\ 2n & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}}$

2. On a : $\dfrac{\pi}{12} \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

   Donc : $S = \dfrac{\sin\left(\frac{4\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \dfrac{\sqrt{6}}{4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}$.

   Or : $S = 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} - 0 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$.

   D'où : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2(3-\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{6}(3+\sqrt{3})}{2(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{12}$

   On en déduit : $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

3. (a) On a : $\boxed{\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}}$

   (b) On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\cos^2(kx) = \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\frac{1+\cos(2kx)}{2}$

   $$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\cos(2kx)$$

   Or : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k = \frac{1-(-1)^{2n}}{1-(-1)} = 0$.

   D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\cos^2(kx) = \frac{1}{2}S$.

   On en déduit :

   $$\boxed{\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\cos^2(kx) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2nx)\sin\big((2n-1)x\big)}{2\cos(x)} & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi] \\ n & \text{si } x = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \end{cases}}$$

---

## Problème 1 : Étude d'une transformation du plan

---

### Partie I

1. On résout : $f(z) = z \quad (E_1)$.

   On a : $(E_1) \iff 2z(1-z) = z \iff z - 2z^2 = 0 \iff z = 0$ ou $z = \dfrac{1}{2}$.

   $\boxed{\text{Les points invariants par } F \text{ sont l'origine et le point d'affixe } \dfrac{1}{2}.}$

2. On résout : $f(z) = -4 \quad (E_2)$.

   On a : $(E_2) \iff 2z(1-z) = -4$
   $\iff z - z^2 = -2$
   $\iff z^2 - z - 2 = 0$
   $\iff (z+1)(z-2) = 0$
   $\iff z = -1$ ou $z = 2$

   $\boxed{\text{Les points ayant pour image le point } A \text{ d'affixe } -4 \text{ sont les points d'affixe } -1 \text{ ou } 2.}$

3. On résout : $f(z) = 2 + 2\mathrm{i} \quad (E_3)$.

   On a : $(E_2) \iff 2z(1-z) = 2+2\mathrm{i}$
   $\iff z - z^2 = 1 + \mathrm{i}$
   $\iff z^2 - z + 1 + \mathrm{i} = 0$
   $\iff \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3+4\mathrm{i}}{4} = 0$

   On cherche une racine carrée de $-3-4\mathrm{i}$ sous la forme algébrique $x + \mathrm{i}y$.

   On a : $|-3-4\mathrm{i}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

   On résout le système :

   $$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2xy = -4 \\ 2y^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ xy = -2 \\ y = 2 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$$

   Donc, $1 - 2\mathrm{i}$ est une racine carrée de $3 + 4\mathrm{i}$.

   Donc : $(E_2) \iff z = \dfrac{1+(1-2\mathrm{i})}{2} = 1 - \mathrm{i}$ ou $z = \dfrac{1-(1-2\mathrm{i})}{2} = \mathrm{i}$.

   $\boxed{\text{Les points ayant pour image le point } B \text{ d'affixe } 2+2\mathrm{i} \text{ sont les points d'affixes } 1-\mathrm{i} \text{ et } \mathrm{i}.}$

4. On résout l'équation : $f(z_1) = f(z_2) \quad (E_4)$.

   On a : $(E_4) \iff 2z_1(1-z_1) = 2z_2(1-z_2)$
   $\iff z_1(1-z_1) = z_2(1-z_2)$
   $\iff z_1 - z_2 - z_1^2 + z_2^2 = 0$
   $\iff (z_1 - z_2)(1 - (z_1 + z_2)) = 0$
   $\iff z_1 + z_2 = 1 \qquad (z_1 \neq z_2)$

   Ainsi, $\boxed{F(M_1) = F(M_2) \iff z_1 + z_2 = 1}$

   Or, $z_1 + z_2 = 1 \iff \dfrac{z_1+z_2}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } F(M_1) = F(M_2) \text{ si, et seulement si, le milieu de } [M_1, M_2] \text{ est le point d'affixe } \frac{1}{2}.}$$

5. Soit $M(z')$ et $N(z)$ des points du plan.
On résout l'équation : $F(N) = M \quad (E_5)$.
On a : $(E_5) \iff f(z) = z' \iff 2z(1-z) = z' \iff 2z^2 - 2z - z' = 0 \quad (E')$.
On reconnaˆit une équation du second degré. Elle admet donc au moins une solution.
Ainsi, l'équation $(E_5)$ admet au moins une solution.

$$\boxed{\text{Ainsi, tous les points admettent au moins un antécédent par } F.}$$

6. L'équation $(E_5)$ admet une seule solution si, et seulement si, l'équation $(E')$ admet une seule solution.
L'équation $(E')$ est une équation du second degré de discriminant : $\Delta = 4 + 8z'$.
Ainsi, $\Delta = 0 \iff z' = -\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Seul le point d'affixe } -\frac{1}{2} \text{ admet un unique antécédent.}}$$

**Partie II**

1. (a) Soit $M(z)$ un point du plan.
D'après l'équation de $\mathcal{D}_1$, on a $M \in \mathcal{D}_1 \iff z \in \mathbb{R}$.
L'image de $\mathcal{D}_1$ par $F$ est donc formée des points dont l'affixe est $2x(1-x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.
Or, $f(x) = 2x(1-x) = 2x - 2x^2 = \dfrac{1}{2} - 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$.
On en déduit le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

La fonction $f$ est polynomiale à coefficients réels. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, l'ensemble des valeurs atteintes par $f$ sur $\mathbb{R}$ est $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$.

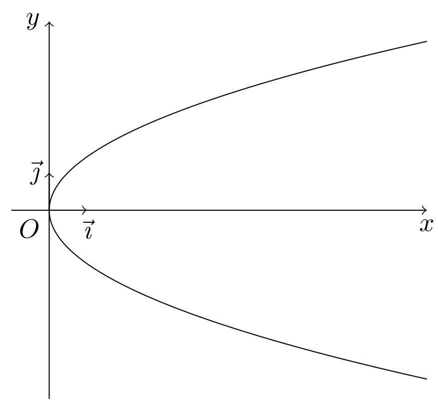
$$\boxed{\text{L'image de } \mathcal{D}_1 \text{ par } F \text{ est donc l'ensemble des points d'affixes dans } \left]-\infty, \frac{1}{2}\right], \textit{ i.e.} \text{ la demi-droite de sommet d'affixe } \frac{1}{2} \text{ et de vecteur directeur } -\vec{\imath}.}$$

(b) i. On a : 
$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\iff f(z) = \overline{f(z)} \\ &\iff 2z(1-z) = 2\bar{z}(1-\bar{z}) \\ &\iff z - \bar{z} - z^2 + \bar{z}^2 = 0 \\ &\iff (z-\bar{z})(1-z-\bar{z}) = 0 \\ &\iff z = \bar{z} \text{ ou } z + \bar{z} = 1 \end{aligned}$$
Donc : $\boxed{f(z) \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z} \text{ ou } z + \bar{z} = 1}$

ii. Soit $M(z)$ un point du plan.
On a : $F(M) \in \mathcal{D}_1 \iff f(z) \in \mathbb{R}$.
Donc : $F(M) \in \mathcal{D}_1 \iff z = \bar{z}$ ou $z + \bar{z} = 1 \iff z \in \mathbb{R}$ ou $2\mathrm{Re}(z) = 1 \iff z \in \mathbb{R}$ ou $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{L'image réciproque de } \mathcal{D}_1 \text{ est donc l'union de l'axe des abscisses et de la droite d'équation } x = \frac{1}{2}.}$$

2. (a) On a la figure suivante :




(b) Soit $M(z)$ un point du plan.
On a : $M \in \mathcal{D}_2 \iff \exists y \in \mathbb{R} \quad z = \mathrm{i}y$.
On note $E$ l'image directe de $\mathcal{D}_2$ par $F$.
Soit $M'(z') = F(M)$. On note $x'$ et $y'$ les parties réelle et imaginaire de $z'$.

On a donc : $M' \in E \iff \exists y \in \mathbb{R} \quad z' = f(\mathrm{i}y)$

$$\begin{aligned}
&\iff \exists y \in \mathbb{R} \quad z' = 2\mathrm{i}y(1-\mathrm{i}y)\\
&\iff \exists y \in \mathbb{R} \quad z' = 2y^2 + 2\mathrm{i}y\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad z' = 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad z' = \frac{\alpha^2}{2} + \mathrm{i}\alpha\\
&\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{\alpha^2}{2} \\ y' = \alpha \end{cases}\\
&\iff x' = \frac{y'^2}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On en déduit que l'image directe de } \mathcal{D}_2 \text{ par } F \text{ est la courbe } (\mathcal{C}).}$

(c) On a : $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff f(z) = -\overline{f(z)}$ .

$$\begin{aligned}
&\iff 2z(1-z) = -2\bar{z}(1-\bar{z})\\
&\iff z + \bar{z} - z^2 - \bar{z}^2 = 0\\
&\iff 2\mathrm{Re}(z) - 2\mathrm{Re}(z^2) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z^2) - \mathrm{Re}(z) = 0}$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $z = x + \mathrm{i}y$.
On a : $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$.

$\boxed{\text{Une équation de l'image réciproque de } \mathcal{D}_2 \text{ par } F \text{ est donc : } x^2 - y^2 - x = 0.}$

3. Soit $\mathcal{C}_1 = \{M(x,y) \in \mathcal{P} / x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \geq 0\}$.

(a) On a : $f(z) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$

$$\begin{aligned}
&= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{2}})\\
&= -4\mathrm{i}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\\
&= 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3t-\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Or : $t \in [0,\pi]$. Donc : $\dfrac{t}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \geq 0$.

D'où : $\boxed{|f(z)| = \sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } \arg(f(z)) = \frac{3t-\pi}{2}[2\pi]}$

(b) Pour $t = 0$, on a : $f(z) = 0$.

Pour $t = \dfrac{\pi}{6}$, on a : $f(z) = 4\sin(\dfrac{\pi}{12})\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$

$$= \sin(\frac{\pi}{12})(2-2\mathrm{i})\sqrt{2} \approx 0,73 - 0,73\mathrm{i}$$

Pour $t = \dfrac{\pi}{3}$, on a : $f(z) = 4\sin(\dfrac{\pi}{6}) = 2$.

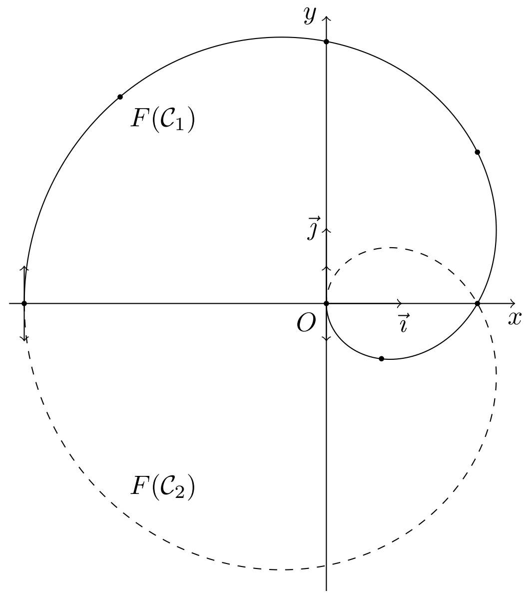
Pour $t = \dfrac{\pi}{2}$, on a : $f(z) = 4\sin(\dfrac{\pi}{4})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = 2 + 2\mathrm{i}$.

Pour $t = \dfrac{2\pi}{3}$, on a : $f(z) = 4\sin(\dfrac{\pi}{3})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{i}\sqrt{3} \approx -3,46\mathrm{i}$.

Pour $t = \dfrac{5\pi}{6}$, on a : $\begin{aligned} f(z) &= 4\sin(\frac{5\pi}{12})\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} \\ &= \sin(\frac{5\pi}{12})(-2+2\mathrm{i})\sqrt{2} \approx -2,73 + 2.73\mathrm{i} \end{aligned}$

Pour $t = \pi$, on a : $f(z) = 4\sin(\dfrac{\pi}{2})\mathrm{e}^{i\pi} = -4$.

On a la figure suivante :




(c) La courbe $\mathcal{C}_2$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_1$ par la symétrie d'axe $(Ox)$.
Soit $M(z) \in \mathcal{C}_2$ et $M'(z') = F(M)$. On a : $z' = f(z)$.
Soit $P(\bar{z})$ et $P'(z'') = F(P)$.
$P$ est l'image de $M$ par la symétrie d'axe $(Ox)$.
De plus, $P \in \mathcal{C}_1$.
On a : $z'' = 2\bar{z}(1-\bar{z}) = \overline{2z(1-z)}$.
Donc, $M'$ est le symétrique de $P'$ par rapport à l'axe $(Ox)$.
Ainsi, tout point de $F(\mathcal{C}_2)$ est le symétrique par rapport à l'axe $(Ox)$ d'un point de $F(\mathcal{C}_1)$.
On démontre de manière analogue la réciproque de ce fait.

$\boxed{\text{L'ensemble } F(\mathcal{C}_2) \text{ est le symétrique de } F(\mathcal{C}_1) \text{ par rapport à l'axe } (Ox).}$