Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 Devoir Maison n°4
Rendu le 3 janvier 2012

Exercice 1 : Étude d'une famille de plans

---

1. On a : $(E') \iff (x+1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2-3=0$.

   L'ensemble $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2. L'équation (E_m) est une équation de la forme :
$$ax+by+cz+d=0$$
   où $a=1-3m$, $b=m+1$, $c=1-m$ et $d=2-2m$.
   Puisque $m\in\mathbb{R}$, on a bien : $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$.
   Deplus, on a : $c=0 \iff m=1$
   et si $m=1$, alors $b=2\neq 0$.
   Donc $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

   Pour tout $m\in\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{P}_m$ est bien un plan.

3. (a) Soit $M\in\big(x,y,z\big)$.
   On a : $M\in\bigcap\limits_{m\in\mathbb{R}}\mathcal{P}_m$
$$\iff \forall m\in\mathbb{R}\quad (-3m+1)x+(m+1)y+(1-m)z-2m+2=0$$
$$\iff \forall m\in\mathbb{R}\quad m(-3x+y-z-2)+x+y+z+2=0$$
$$\iff \begin{cases}-3x+y-z-2=0 & (E_1)\\ x+y+z+2=0 & (E_2)\end{cases}$$
   Les équations (E_1) et (E_2) ne sont pas proportionnelles.

   L'ensemble des points communs aux plans $\mathcal{P}_m$ est la droite $\mathcal{D}$ de système d'équations cartésiennes :
$$\begin{cases}-3x+y-z-2=0 & (E_1)\\ x+y+z+2=0 & (E_2)\end{cases}$$

   (b) On note (S) le système d'équation de D.
   On a : $(S) \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\iff} \begin{cases}-2x+2y=0\\ x+y+z+2=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=x\\ z=-2-2x\end{cases}$.

   Une représentation paramétrique de D est donc :
$$\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=-2-2t\end{cases}\qquad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

   (c) Soit A le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$.
   Il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que : $A\begin{pmatrix}t\\t\\-2-t\end{pmatrix}$.
   On a : $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}t+1\\t+1\\1-2t\end{pmatrix}$.
   Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.
   Or : $\overrightarrow{\Omega A}.\vec{u}=4t$.
   D'où $t=0$.
   Donc : $A\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ et : $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.
   Par conséquent, $\|\overrightarrow{\Omega A}\|=\sqrt{3}$.
   Le point A est donc un point de la sphère $\mathcal{S}$.

   La droite $\mathcal{D}$ est donc tangente à la sphère $\mathcal{S}$ en $A\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$.

   (d) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{E}$.
   On a : $M\in\mathcal{Q} \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$sont orthogonaux. $\iff \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$.
   Or : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z+2\end{pmatrix}$.
   Donc : $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=x+y-2z-4$.

   Le plan $\mathcal{Q}$ admet donc pour équation cartésienne :
$$x+y-2z-4=0$$

(e) Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.

Le point M n'appartient à aucun des plans $\mathcal{P}_m$ si, et seulement si, l'équation (E_m) d'inconnue $m \in \mathbb{R}$ n'admet pas de solution.
Or : $(E_m) \iff m(-3x+y-z-2)+x+y+z+2=0$.
L'équation (E_m) n'admet pas de solution si, et seulement si, $\begin{cases}-3x+y-z-2=0\\ x+y+z+2\neq 0\end{cases}$

> D'après le système d'équations de $\mathcal{D}$, les points M qui n'appartiennent à aucun des plans $\mathcal{P}_m$ est le plan d'équation $-3x+y-z-2=0$ privé de la droite $\mathcal{D}$.

4. (a) Soit $m \in \mathbb{R}$.

Le point A appartient au plan $\mathcal{P}_{\Updownarrow}$ et à la sphère $\mathcal{S}$.
Par conséquent, l'intersection de $\mathcal{P}_m$ et de $\mathcal{S}$ n'est pas vide.
Ainsi, $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{S}$ est un cercle $\mathcal{C}_m$ de rayon R_m éventuellement nul.
Le centre Ω_m de $\mathcal{C}_m$ est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}_m$.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}_m$ est $\vec{n}_m\begin{pmatrix}-3m+1\\m+1\\1-m\end{pmatrix}$.

Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\Omega_m\begin{pmatrix}-1+(-3m+1)t\\-1+(m+1)t\\-3+(1-m)t\end{pmatrix}$.

Or : $\Omega_m \in \mathcal{P}_m$.

$$\begin{aligned}
\text{et : } & (-3m+1)(-1+(-3m+1)t)+(m+1)(-1+(m+1)t) \quad .\\
&+(1-m)(-3+(1-m)t)-2m+2\\
&= ((-3m+1)^2+(m+1)^2+(1-m)^2)t+3m-3 \qquad (\star)\\
&= (11m^2-6m+3)t+3m-3
\end{aligned}$$

Donc : $t = \dfrac{3-3m}{11m^2-6m+3}$.

Remarque 1. *La relation* $(\star)$ *nous assure que* $11m^2-6m+3>0$.

$$\begin{aligned}
\text{D'où : } -1+(-3m+1)t &= -1+(-3m+1)\frac{3-3m}{11m^2-6m+3} \quad ,\\
&= \frac{-11m^2+6m-3+9m^2-12m+3}{11m^2-6m+3}\\
&= \frac{-2m^2-6m}{11m^2-6m+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-1+(m+1)t &= -1+(m+1)\frac{3-3m}{11m^2-6m+3}\\
&= \frac{-11m^2+6m-3-3m^2+3}{11m^2-6m+3}\\
&= \frac{-14m^2+6m}{-11m^2+6m-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et : } -3+(1-m)t &= -3+(1-m)\frac{3-3m}{11m^2-6m+3}\\
&= \frac{-33m^2+18m-9+3m^2-6m+3}{11m^2-6m+3}\\
&= \frac{-30m^2+12m-6}{11m^2-6m+3}
\end{aligned}$$

On en déduit que : $\Omega_m\begin{pmatrix}\dfrac{-2m^2-6m}{11m^2-6m+3}\\ \dfrac{-14m^2+6m}{-11m^2+6m-3}\\ \dfrac{-30m^2+12m-6}{11m^2-6m+3}\end{pmatrix}$.

On a donc : $\overrightarrow{A\Omega_m}\begin{pmatrix}\dfrac{-2m^2-6m}{11m^2-6m+3}\\ \dfrac{-14m^2+6m}{-11m^2+6m-3}\\ \dfrac{-8m^2}{11m^2-6m+3}\end{pmatrix} = \dfrac{2m}{11m^2-6m+3}\begin{pmatrix}-m-3\\-7m+3\\-4m\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\text{D'où : } R_m = \|\overrightarrow{A\Omega_m}\| &= \frac{|2m|}{11m^2-6m+3}\sqrt{(-m-3)^2+(-7m+3)^2+(-4m)^2}.\\
&= \frac{|2m|}{11m^2-6m+3}\sqrt{66m^2-36m+18}\\
&= \frac{2\sqrt{6}|m|}{\sqrt{11m^2-6m+3}}
\end{aligned}$$

> Ainsi, $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{S}$ est le cercle $\mathcal{C}_m$ de centre $\Omega_m\begin{pmatrix}\dfrac{-2m^2-6m}{11m^2-6m+3}\\ \dfrac{-14m^2+6m}{-11m^2+6m-3}\\ \dfrac{-30m^2+12m-6}{11m^2-6m+3}\end{pmatrix}$
>
> de rayon $R_m = \dfrac{2\sqrt{6}|m|}{\sqrt{11m^2-6m+3}}$.

(b) La droite $\mathcal{D}$ est tangente à la sphère $\mathcal{S}$ en A.
Puisque le plan $\mathcal{Q}$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en A, le plan $\mathcal{Q}$ contient le centre Ω de $\mathcal{S}$.

De plus, Ω_m est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}_{\Updownarrow}$ et la plan $\mathcal{P}_m$ contient la droite $\mathcal{D}$.
D'où : $\overrightarrow{\Omega\Omega_m}$ est orthogonal à $\mathcal{P}_{\Updownarrow}$ et donc à $\mathcal{D}$.
Puisque $\Omega \in \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$, on en déduit que : $\Omega_m \in \mathcal{Q}$.
De plus, $\overrightarrow{\Omega\Omega_m}$ et $\overrightarrow{\Omega_m A}$ sont orthogonaux.
Donc, Ω_m est un point de la sphère $\mathcal{S}'$ de diamètre $[\Omega A]$.

Son centre Ω' a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

D'où : $\Omega_m \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{S}'$.
Puisque $[\Omega A]$ est le diamètre de $\mathcal{S}'$, $\Omega \in \mathcal{Q}$ et $A \in \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} \cap \mathcal{S}'$ est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre Ω' et de rayon $\dfrac{R}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{Les points } \Omega_m \text{ appartiennent au cercle } \mathcal{C}' \text{ de centre } \Omega' \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{ et de rayon } R' = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

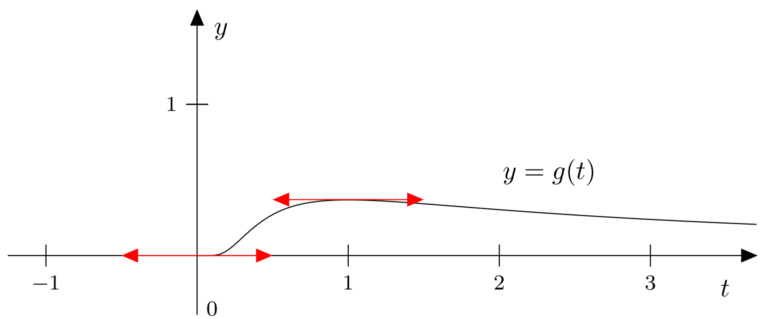
Exercice 2 : Étude d'une fonction et d'une courbe paramétrée

1. $u : t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Donc } f = v \circ u \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$
   En tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas, $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$
   De plus : $\forall t > 0 \quad f'(t) = \dfrac{1}{t^2} \exp\left(-\dfrac{1}{t} \right)$
   i.e. $\boxed{\forall t > 0 \quad t f'(t) = g(t)}$ $\left(\text{car } g(t) = \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t} \right)$

2. On a : $g(t) = \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t}$
   i.e. $g(t) = \exp\left(-\dfrac{1}{t} - \ln(t) \right)$
   Or : $-\dfrac{1}{t} - \ln(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} -\dfrac{1}{t}$.
   Donc : $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \left(-\dfrac{1}{t} - \ln(t) \right) = -\infty$.
   Par composition de limites, on a : $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} g(t) = 0$.
   $\boxed{\text{On peut prolonger } g \text{ par continuité en posant } g(0) = 0.}$
   On a : $\forall t > 0 \quad \dfrac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t^2}$
   i.e. $\dfrac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \exp\left(-\dfrac{1}{t} - 2\ln(t) \right)$
   Or : $-\dfrac{1}{t} - 2\ln(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} -\dfrac{1}{t}$. Donc : $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \left(-\dfrac{1}{t} - 2\ln(t) \right) = -\infty$.
   Par composition de limites, on a : $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \dfrac{g(t) - g(0)}{t - 0} = 0$.
   $\boxed{\text{Donc } g \text{ est dérivable en 0 et } g'(0) = 0}$

3. (a) On a : $\forall t > 0 \quad g'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \exp\left(-\dfrac{1}{t} \right) + \dfrac{1}{t^3} \exp\left(-\dfrac{1}{t} \right)$.
   $$= (-t + 1) \frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t^3}$$
   $g'(t)$ est du signe de $-t + 1$ sur $]0, +\infty[$.
   Et $1 - t \geq 0 \iff t \leq 1$.
   On en déduit le tableau de variations de g :

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0



4. Soit $t > 0$.
   $M(t)$ appartient à la première bissectrice $\iff y(t) = x(t) \iff g(t) = f'(t) \iff$ $f'(t) = f'(t) \iff (t-1) f'(t) = 0 \iff \boxed{t = 1}$ (car $f'(t) \neq 0$)

5. Le coefficient directeur de la droite $(OM(t))$ est $\dfrac{y(t)-0}{x(t)-0} = \dfrac{g(t)}{f'(t)} = t$

D'où $\boxed{\lim_{t\longrightarrow 0^+} \dfrac{y(t)-0}{x(t)-0} = 0 \text{ et } \lim_{t\longrightarrow +\infty} \dfrac{y(t)-0}{x(t)-0} = +\infty}$.

6. (a) La fonction x est un quotient de fonctions dérivables. Donc, x est dérivable.
De plus : $\forall t > 0 \quad x'(t) = f''(t)$

$$\begin{aligned} &= \frac{-2}{t^3}\exp\Big(-\frac{1}{t}\Big) + \frac{1}{t^2}\frac{1}{t^2}\exp\Big(-\frac{1}{t}\Big) \\ &= \frac{1}{t^4}\exp\Big(-\frac{1}{t}\Big)(-2t+1) \end{aligned}$$

Donc, $x'(t)$ est du signe de $(-2t+1)$.

Or : $-2t+1 \geq 0 \iff t \leq \dfrac{1}{2}$.

Nous avons déjà étudié les variations de g et $y = g$.

On en déduit le tableau de variations de x et y :

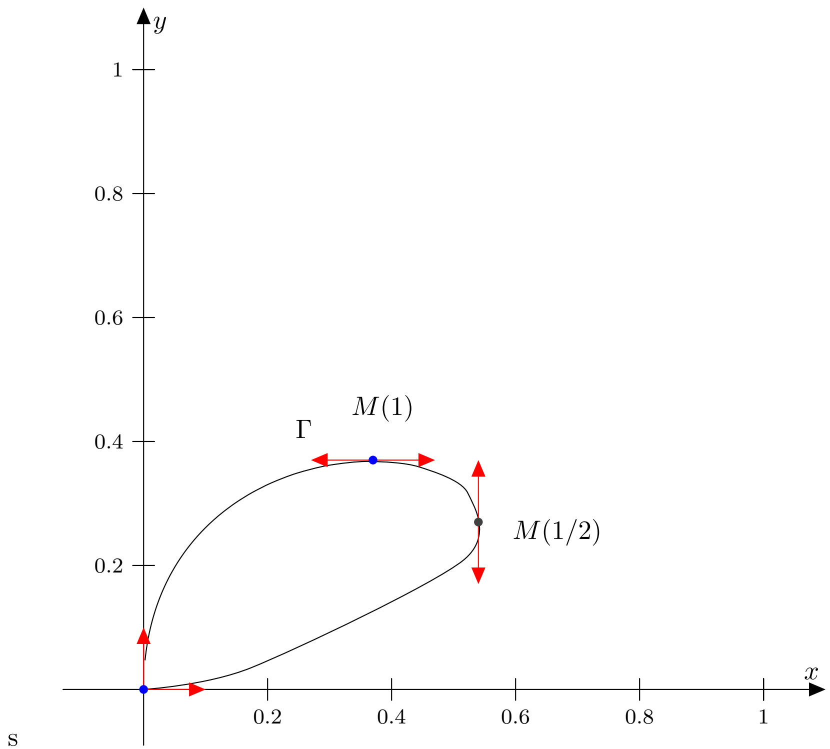
t	0		$1/2$		1		$+\infty$
$x'(t)$	‖	$+$	0	$-$		$-$	
$x(t)$	‖ 0	↗	$4/\mathrm{e}^2$	↘	$1/\mathrm{e}$	↘	0
$y'(t)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	‖ 0	↗	$2/\mathrm{e}^2$	↗	$1/\mathrm{e}$	↘	0

7. Comme $x'(1/2) = 0$ et $y'(1/2) \neq 0$, $\boxed{\Gamma \text{ admet une tangente verticale en } M(1/2).}$

Comme $x'(1) \neq 0$ et $y'(1) = 0$, $\boxed{\Gamma \text{ admet une tangente horizontale en } M(1).}$

D'après **5.**, $\boxed{\Gamma \text{ admet une demi-tangente horizontale en le point limite } M(0).}$

et $\boxed{\Gamma \text{ admet une demi-tangente verticale en le point limite } M(+\infty)}$ On en déduit la courbe suivante :



s

8. (a) $(E_n) \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{t}{n} \Leftrightarrow \dfrac{f(t)}{t} = \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow g(t) = \dfrac{1}{n}$ (dans $]0,+\infty[$).
D'après la question **3.**, g est continue et strictement coissante sur $]0,1[$ donc g réalise une bijection de $]0,1[$ dans $g(]0,1[) = \Big]0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\Big[$.

De plus, pour tout $n \geq 3$, $\dfrac{1}{n} \in \Big]0, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\Big[= g(]0,1[)$.

$\boxed{\text{Donc l'équation } (E_n) \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{t}{n} \Leftrightarrow g(t) = \dfrac{1}{n} \text{ a une unique solution } \alpha_n \text{ dans }]0,1[}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Par définition de α_n, on a : $g(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ et $g(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$ d'où $g(\alpha_{n+1}) < g(\alpha_n)$.
Comme g est strictement croissante sur $]0,1[$, α_{n+1} et α_n sont des éléments de $]0,1[$, on a donc $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.
D'où $\boxed{(\alpha_n)_{n\geq 3} \text{ est strictement décroissante.}}$

(c) D'après ce qui précède, $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ est décroissante et minorée par 0.
Donc $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ converge une limite $l \geq 0$.
On note g_1 la restriction de g à l'intervalle $[0,1]$.
g_1 réalise une bijection de $[0,1]$ dans $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.
Et on a : $\alpha_n = g_1^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$, g_1^{-1} est continue sur $\left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, et $g_1^{-1}(0) = 0$ (car $g_1(0) = 0$).
On en déduit que $\boxed{(\alpha_n)_{n\geq 3} \text{ converge vers } g_1^{-1}(0) = 0.}$
Par définition de α_n, on a :

$$g(\alpha_n) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{\exp\left(-\frac{1}{\alpha_n}\right)}{\alpha_n} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{1}{\alpha_n}\right) = \frac{\alpha_n}{n}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\alpha_n} = -\ln(n) + \ln(\alpha_n) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_n} + \ln(\alpha_n) = \ln(n)$$

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \alpha_n = 0^+$, on a : $\frac{1}{\alpha_n} + \ln(\alpha_n) \sim \frac{1}{\alpha_n}$.
D'où $\frac{1}{\alpha_n} \sim \ln(n)$

$$\boxed{\text{Bilan : } \alpha_n \sim \frac{1}{\ln(n)}}$$