Problème 1 : Étude des racines d'un polynôme - Calcul de $\zeta(2)$

1. a. D'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé, on a :
$$\boxed{\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}$$

b. On a : $\text{cotan}^2(\varphi) = \dfrac{\cos^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} = \dfrac{1-\sin^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}$.

D'où : $\boxed{\text{cotan}^2(\varphi) = \dfrac{1}{\sin^2(\varphi)} - 1}$

2. a. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Moivre, on a :
$\cos\big((2p+1)\varphi\big) + \mathrm{i}\sin\big((2p+1)\varphi\big) = \big(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\big)^{2p+1}$
D'après le binôme de Newton, on a :
$$\cos\big((2p+1)\varphi\big) + \mathrm{i}\sin\big((2p+1)\varphi\big) = \sum_{j=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{j} \cos^{2p+1-j}(\varphi)\big(i\sin(\varphi)\big)^j$$
En décomposant en une somme d'indices pairs, et une autre d'indices impairs, on a :
$$\cos\big((2p+1)\varphi\big) + \mathrm{i}\sin\big((2p+1)\varphi\big) = \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k} \cos^{2p+1-2k}(\varphi)\big(\mathrm{i}\sin(\varphi)\big)^{2k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi)\big(\mathrm{i}\sin(\varphi)\big)^{2k+1}$$
Or $\mathrm{i}^{2k} = (-1)^k$ et $\mathrm{i}^{2k+1} = (-1)^k\mathrm{i}$. En égalant les parties imaginaires, on a :
$$\boxed{\sin\big((2p+1)\varphi\big) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k+1}(\varphi)}$$

b. Comme $\varphi \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on a : $\sin(\varphi) \neq 0$.
D'où : $\cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k+1}(\varphi) = \sin^{2p+1}(\varphi)\cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k-2p}(\varphi)$
$= \sin^{2p+1}(\varphi)\big(\text{cotan}^2(\varphi)\big)^{\mathrm{p-k}}$
Comme $\sin^{2p+1}(\varphi)$ est indépendant de k, en remplaçant dans l'égalité de 2.a.,
on a : $\boxed{\sin\big((2p+1)\varphi\big) = \sin^{2p+1}(\varphi)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\big(\text{cotan}^2\varphi\big)^{p-k}}$

3. a. Appliquons le résultat de la question 2.b. à $\varphi = \dfrac{k\pi}{2p+1} \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ (car $1 \leq k \leq p$) :
$$\sin\big((2p+1)\frac{k\pi}{2p+1}\big) = \sin^{2p+1}\big(\frac{k\pi}{2p+1}\big)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\big(\text{cotan}^2\frac{k\pi}{2p+1}\big)^{p-k}$$
i.e. $\sin(k\pi) = \sin^{2p+1}\big(\dfrac{k\pi}{2p+1}\big)P(\gamma_k)$ car $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}X^{p-k}$

Comme $\sin(k\pi) = 0$ et $\sin\dfrac{k\pi}{2p+1} \neq 0$, on a : $\boxed{P(\gamma_k) = 0 \text{ pour tout } k \in [\![1,p]\!]}$.

b. Soit $k \in [\![1,p]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2p+1} \in \left[\dfrac{\pi}{2p+1}, \dfrac{p\pi}{2p+1}\right]$.
Comme $2p < 2p+1$, on a : $\dfrac{k\pi}{2p+1} \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$.
La fonction f : $t \mapsto \text{cotan}^2 t = \dfrac{1}{\tan^2(t)}$ est continue strictement décroissante sur $]0, \dfrac{\pi}{2}[$ (car f dérivable sur $]0, \dfrac{\pi}{2}[$ et $f'(t) = -2\dfrac{1+\tan^2(t)}{\tan^3(t)} < 0$)
Comme les $\dfrac{k\pi}{2p+1}$ sont deux à deux distincts donc les γ_k le sont aussi.
On a donc obtenu p racines distinctes pour le polynôme P. Celui ci est de degré p donc il n'en a pas d'autres.
Par conséquent, $\boxed{P \text{ a } p \text{ racines distinctes qui sont les } \gamma_k,\ k \in [\![1,p]\!]}$.

c. D'après la formule rappelée à la question 1., on a :
$$\sum_{k=1}^{p}\gamma_k = -\frac{(-1)^1\binom{2p+1}{2\times 1+1}}{(-1)^0\binom{2p+1}{1}} = \frac{\frac{(2p+1)(2p)(2p-1)}{6}}{2p+1}.$$
D'où : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}}$

Or $\text{cotan}^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$
$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \sum_{k=1}^{p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) + p$$
$$= \frac{p(2p-1)}{3} + p = \frac{p(2p-1+3)}{3}$$
D'où : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}}$

4. a. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction sin est strictement croissante.

D'où pour tout réel $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin 0 < \sin\varphi$ ie $0 < \sin\varphi$.

On pose $g(\varphi) = \varphi - \sin\varphi$ pour tout $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

La fonction g est une différence de fonctions dérivables. Elle est donc dérivable. Sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, $g'(\varphi) = 1 - \cos\varphi \geq 0$ et ne s'annule qu'en $\varphi = 0$. D'où g est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $g(\varphi) > g(0)$.

i.e. $\boxed{\varphi > \sin\varphi \text{ pour tout } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[}$

De même, en introduisant $h(\varphi) = \tan\varphi - \varphi$ pour tout $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on peut montrer que : $\boxed{\varphi < \tan\varphi \text{ pour tout } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[}$

Bilan $\boxed{\text{pour tout réel } \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ 0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi}$

b. Pour k entre 1 et p, on utilise l'inégalité précédente pour $\varphi = \frac{k\pi}{2p+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \frac{k\pi}{2p+1} < \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$$

Tous les membres sont strictement positifs, donc on peut composer avec la fonction $t \mapsto 1/t^2$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} < \frac{(2p+1)^2}{(k\pi)^2} < \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$$

Pour $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{\tan\varphi} = \text{cotan}\varphi$. Si on somme alors pour k allant de 1 à p en utilisant les formules de la question 3.c, on obtient : $\boxed{\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}}$

c. En multipliant par $\frac{\pi^2}{(2p+1)^2} > 0$, on obtient : $\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < S_p < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$

Or : $\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} \sim \frac{2p^2\pi^2}{12p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2} \sim \frac{\pi^2}{6}$.

D'où : $\lim_{p\to+\infty} \frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\lim_{p\to+\infty} \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{p\to+\infty} S_p = \frac{\pi^2}{6} \text{ soit } S = \frac{\pi^2}{6}}$.

5. Pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{4}S_n$ donc $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et a pour limite $\boxed{U = \frac{\pi^2}{24}}$.

En décomposant w_{2n+1} en une somme d'indices pairs ($k = 2p$) et en une somme d'indices impairs ($k = 2p+1$), on obtient : $w_{2n+1} = u_n + v_n$

Pour $n \geq 1$, $v_n = S_{2n+1} - u_n$ donc $(v_n)_{n\geq 1}$ converge et a pour limite $V = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24}$ *i.e.* $\boxed{V = \frac{\pi^2}{8}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On traite deux cas :

(a) Cas où n pair *i.e.* il existe $N \geq 1$ tel que $n = 2N$,
En décomposant w_{2N} en une somme d'indices pairs ($k = 2p$) et en une somme d'indices impairs ($k = 2p+1$), on obtient : $w_{2N} = v_{N-1} - u_N$ car $(-1)^{2p} = 1$ et $(-1)^{2p+1} = -1$.
$(w_{2N})_{N\geq 1}$ converge vers $V - U = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$.

(b) Cas où n impair ie il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2N+1$,
En décomposant w_{2N+1} en une somme d'indices pairs ($k = 2p$) et en une somme d'indices impairs ($k = 2p+1$), on obtient : $w_{2N+1} = v_N - u_N$.
$(w_{2N+1})_{N\geq 0}$ converge vers $V - U = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$.

Comme $(w_{2N+1})_{N\geq 0}$ et $(w_{2N})_{N\geq 1}$ convergent vers la même limite $\frac{\pi^2}{12}$, d'après le théorème des suites extraites, on en déduit que $(w_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\boxed{W = \frac{\pi^2}{12}}$.

Remarque 1. *La fonction ζ de Riemann est définie par la relation : $\zeta(z) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^z}$ où $z \in \mathbb{C}$ et $k^z = \exp(z\ln(k))$. Nous venons donc de montrer que : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.*
La célèbre conjecture de Riemann porte sur la localisation des zéros de cette application.

Problème 2 : Étude de deux suites

---

1. On a : $f_n(0) = -1$ et : $f_n(1) = 3\mathrm{e}^{-1} - 1$.

Or : $\mathrm{e}^{-1} > \frac{1}{3}$.

D'où : $\boxed{f_n(0) < 0 \text{ et } f_n(1) > 0}$

2. Par composition, somme et produit de fonctions dérivables, la fonction f_n est dérivable.

On a : $f_n'(x) = 3nx^{n-1}\exp(-x^2) - 6x^{n+1}\exp(-x^2)$

$$= 3x^{n-1}(n-2x^2)\exp(-x^2)$$

Or : $n - 2x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq \dfrac{n}{2} \iff x \leq \sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

Puisque $n \geq 2$, on a : $n-1 > 0$ et $\sqrt{\dfrac{n}{2}} \geq 1$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f_n(t)$	-1	$\nearrow$	$3\mathrm{e}^{-1}-1$	$\nearrow$	$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	$\searrow$	-1

Par les croissances comparées, on a : $\lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} X^{\frac{n}{2}}\exp(-X) = 0$.

Or : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. D'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^n \exp(-x^2) = 0$.

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_n(x) = -1}$

Puisque elle est continue et strictement croissante sur $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$, la fonction f_n est une bijection de $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$ dans $\left[-1, f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)\right]$. Or : $f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right) \geq f_n(1) > 0$.

Donc : $0 \in \left[-1, f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)\right]$. Ainsi, la fonction f_n s'annule en un unique réel u_n de $\left[0, \sqrt{\dfrac{n}{2}}\right]$. Puisque $f_n(1) > 0$ et f_n est croissante, on a de plus : $u_n < 1$.

De même, la fonction f_n est un bijection de $\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}}, +\infty\right[$ dans $\left]-1, f_n\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right)\right]$.

Donc, la fonction f_n s'annule en un unique réel v_n de $\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}}, +\infty\right[$.

On a : $v_n > \sqrt{\dfrac{n}{2}} \geq 1$.

$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f_n \text{ s'annule en deux réels } u_n \text{ et } v_n \text{ tel que : } u_n < 1 < v_n.}$

3. On a : $v_n > \sqrt{\dfrac{n}{2}}$. Or, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{\dfrac{n}{2}} = +\infty$.

Par le théorème de comparaison, on en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = +\infty}$

4. a. On a : $f_n(u_n) = 3u_n^n \exp(-u_n^2) - 1 = 0$. Donc : $\boxed{\exp(-u_n^2) = \dfrac{1}{3u_n^n}}$

b. On a : $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}\exp(-u_n^2) - 1 = 3u_n^{n+1}\dfrac{1}{3u_n^n} - 1 = u_n - 1$

Or : $u_n < 1$. Donc : $\boxed{f_{n+1}(u_n) < 0}$

c. On a donc : $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}u_{n+1}$.

Or : $u_n \in [0,1]$ et $u_{n+1} \in [0,1]$.

De plus, la fonction f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

Donc : $u_n < u_{n+1}$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc strictement croissante.}}$

d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée par 1.

$\boxed{\text{Par le théorème de la convergence monotone, la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$

5. a. On a : $g_n(t) = 0 \iff \ln(3) + n\ln(t) - t^2 = 0$

$$\iff \exp(\ln(3) + n\ln(t) - t^2) = 1$$

$$\iff 3t^n\exp(-t^2) = 1$$

$$\iff 3t^n\exp(-t^2) - 1 = 0$$

Donc : $\boxed{g_n(t) = 0 \iff f_n(t) = 0}$

b. On a : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l \neq 1$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1, on a : $l < 1$. Par la stricte croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $l > 0$.

On a : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n^2 = l^2$ et : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \ln(u_n) = \ln(l) < 0$.

Donc : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n\ln(u_n) = -\infty$. D'où : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} g_n(u_n) = -\infty$.

Or, par la question précédente : $\forall n \geq 2 \quad g_n(u_n) = 0$. Donc : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} g_n(u_n) = 0$.

La limite d'une suite est unique. On aboutit donc à une contradiction.

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 1.}}$

c. On a : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} w_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$.

Donc : $0 = g_n(u_n) = \ln(3) + n\ln(u_n) - u_n^2 = \ln(3) + n\ln(1+w_n) - (1+w_n)^2$

$$= \ln(3) + n(w_n + o(w_n)) - (1 + 2w_n + o(w_n))$$

$$= \ln(3) - 1 + nw_n + o(nw_n)$$

D'où : $nw_n = 1 - \ln(3) + o(nw_n)$. Ainsi : $nw_n \sim 1 - \ln(3)$.

Donc : $\boxed{w_n \sim \dfrac{1-\ln(3)}{n}}$