Problème 1 : Une application de l'égalité de Taylor-Lagrange

I-

Remarque 1. *Pour pouvoir affirmer la continuité de φ sur $[0,a]$, il manque la continuité de f' sur $[0,a]$. Il semble donc qu'il y ait une erreur dans l'énoncé. On suppose donc que φ n'est pas continue sur $[0,a]$ mais de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$. De même, dans la partie III, nous supposerons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.*

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,a]$ et deux fois dérivable sur $]0,a[$. La fonction f' est donc continue sur $[0,a]$ dérivable sur $]0,a[$. Ainsi, la fonction φ est une somme de fonctions continues sur $[0,a]$ et dérivable sur $]0,a[$. La fonction φ est donc continue sur $[0,a]$ et dérivable sur $]0,a[$.

De plus, $\varphi(0)=0$ et $\varphi(a)=0$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]0,a[$ tel que $\varphi'(c)=0$.

Or : $\varphi'(c)=-f'(c)+f'(c)+(a-c)f''(c)-\lambda(a-c)=(a-c)f''(c)-\lambda(a-c)$.

Or $a-c\neq 0$. Donc : $\lambda=f''(c)$.

Or :$\varphi(0)=f(a)-f(0)-af'(0)-\dfrac{\lambda}{2}a^2=0$.

D'où : $f(a)=f(0)+af'(0)+\dfrac{\lambda}{2}a^2$.

On en déduit : $\boxed{f(a)=f(0)+af'(0)+\dfrac{a^2}{2}f''(c)}$

II- 1. On calcule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3$.

On reconnait une somme téléscopique. On obtient ainsi : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3=(n+1)^3-1}$

2. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3&=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+3k+1)-k^3\\&=\sum_{k=1}^{n}3k^2+3k+1\\&=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2&=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-k^3-3\frac{n(n+1)}{2}-n\right)\\&=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-1-3\frac{n(n+1)}{2}-n\right)\\&=\frac{n+1}{6}\left(2(n+1)^2-3n-2\right)\\&=\frac{n+1}{6}(2n^2+n)\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

III- Calcul de la limite d'une somme

Soit $k\in[\![1,n]\!]$.

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{k}{n^2}\right]$ et dérivable sur $\left]0,\dfrac{k}{n^2}\right[$.

D'après la question I, il existe $c_k\in\left[0,\dfrac{k}{n^2}\right]$ tel que :

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right)=f(0)+\frac{k}{n^2}f'(0)+\frac{k^2}{2n^4}f''(c_k)=\frac{k}{n^2}f'(0)+\frac{k^2}{2n^4}f''(c_k)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'(0)+\frac{k^2}{2n^4}f''(c_k)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4}f''(c_k).\\&=\frac{n(n+1)}{2n^2}f'(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4}f''(c_k)\end{aligned}$$

Or, la fonction f'' est bornée.

Donc, il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x\in]0,1[\quad |f''(x)|\leq M$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4}f''(c_k)\right|&\leq\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{k^2}{2n^4}f''(c_k)\right|\leq\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2|f''(c_k)|\\&\leq\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2M\leq\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}M\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)M}{12n^4}=0$

Par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4}f''(c_k)=0$.

D'autre part : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}f'(0)=\frac{f'(0)}{2}$

$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \dfrac{f'(0)}{2}.}$

IV- On a : $p_n = \dfrac{1}{n^{2n}} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n^2+k)$.

Donc : $\ln(p_n) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(n^2+k)\right) - 2n\ln(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(\ln(n^2+k) - 2\ln(n)\big)$.

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n^2+k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

La fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.
Ainsi, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée seconde est continue sur $[0,1]$.
Une fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment. La dérivée seconde de f est donc bornée.

Par la question III, la suite $(\ln(p_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{f'(0)}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.}$

Problème 2 : Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et de ses itérés

---

1. (a) Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On a : $u \in F \iff x+y=0 \iff y=-x \iff u = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix}$.

$$\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \quad u = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc, $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$\boxed{\text{En particulier, } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a alors : $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc : $\alpha = \beta = 0$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est donc libre.

$\boxed{\text{Une base de } F \text{ est } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$

(b) Soient $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

On a : $f(\alpha u_1 + \beta u_2) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 \end{pmatrix}$.

$$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 \\ -\alpha x_1 - \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 \\ 2\alpha x_1 + 2\beta x_2 + 2\alpha y_1 + 2\beta y_2 + 2\alpha z_1 + 2\beta z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ -x_1 + y_1 \\ 2x_1 + 2y_1 + 2z_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 - y_2 \\ -x_2 + y_2 \\ 2x_2 + 2y_2 + 2z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha f(u_1) + \beta f(u_2)$$

L'application f est donc linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
D'où : $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

(c) Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On a : $u \in \ker(f) \iff f(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x-y \\ -x+y \\ 2x+2y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases} \iff \exists\alpha\in\mathbb{R} \quad u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ engendre $\ker(f)$. Puisque il est non nul, il forme une famille libre.

$\boxed{\text{Une base } \ker(f) \text{ est } \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.}$

Le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul. L'application f n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective.

$\boxed{\text{L'application } f \text{ n'est pas un automorphisme.}}$

(d) $\boxed{\text{Une base } \mathbb{R}^3 \text{ est la base canonique } \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).}$

Une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ est $\left(f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right)$.

et : $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$.

Une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ est donc $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ils forment une famille libre.

$\boxed{\text{Une base de } \mathrm{Im}(f) \text{ est donc } \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right).}$

Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) = 2$.

Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est : $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right)$.

Or : $1 + (-1) = 0$ et $0 + 0 = 0$. Ces deux vecteurs vérifient l'équation de F.

Donc : $\mathrm{Im}(f) \subset F$.

D'où : $\boxed{F = \mathrm{Im}(f)}$

2. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc : } f^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= f\begin{pmatrix}x-y\\-x+y\\2x+2y+2z\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}(x-y)-(-x+y)\\-(x-y)+(-x+y)\\2(x-y)+2(-x+y)+2(2x+2y+2z)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2x-2y\\-2x+2y\\2(2x+2y+2z)\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x-y\\-x+y\\2x+2y+2z\end{pmatrix} = 2f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{f^2 = 2f}$.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f^k = 2^{k-1}f$.

Initialisation : On a : $f^1 = f = 2^{1-1}f$.

La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que : $f^k = 2^{k-1}f$.

On a : $f^{k+1} = f \circ f^k = f \circ (2^{k-1}f) = 2^{k-1}f \circ f = 2^{k-1}.2f = 2^k f$.

La propriété est donc héréditaire.

On en déduit que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f^k = 2^{k-1}f}$

3. (a) On a : $f(\vec{w}) = f(\vec{u} - \vec{v}) = f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = f(\vec{u}) - f\left(\frac{1}{2}f(\vec{u})\right)$

$$= f(\vec{u}) - \frac{1}{2}f^2(u) = f(\vec{u}) - \frac{1}{2}.2.f(u)$$

Donc : $\boxed{f(\vec{w}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}$ et : $\boxed{\vec{w} \in \ker(f)}$

(b) Avec les notations précédentes, on a : $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

Or : $\vec{v} = \frac{1}{2}f(\vec{u})$. Donc : $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f)$.

De plus : $\vec{w} \in \ker(f)$.

On en déduit que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$.

Or, d'après le théorème du rang : $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$.

On en déduit que : $\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)}$

4. (a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2 \quad g^n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{I}$.

Initialisation : On a : $g^0 = \mathrm{I} = 0.f + 1.\mathrm{I}$.

Ainsi : $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$ convient.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que : $g^n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{I}$.

On a : $g^{n+1} = g \circ g^n$
$$\begin{aligned} &= (f+\mathrm{I}) \circ (\alpha_n f + \beta_n \mathrm{I}) \\ &= \alpha_n f^2 + (\alpha_n + \beta_n) f + \beta_n \mathrm{I} \\ &= 2\alpha_n f + (\alpha_n + \beta_n) f + \beta_n \mathrm{I} \\ &= (3\alpha_n + \beta_n) f + \beta_n \mathrm{I} \end{aligned}$$
On pose donc : $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = \beta_n$.
Ainsi : $g^{n+1} = \alpha_{n+1} f + \beta_{n+1} \mathrm{I}$
La propriété est donc héréditaire.

On en déduit qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad g_n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{I}$$
De plus :
$$\alpha_0 = 0,\ \beta_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + \beta_n \text{ et } \beta_{n+1} = \beta_n$$

(b) On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_{n+1} = \beta_n$.
Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_n = \beta_0 = 1}$
D'où : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 1$.
On cherche $a \in \mathbb{R}$ tel que $(\alpha_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique de raison 3.
Ceci est équivalent à : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{n+1} - a = 3(\alpha_n - a) = 3\alpha_n - 3a$.
C'est-à-dire à : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_{n+1} = 3\alpha_n - 2a$.
Donc $a = -\dfrac{1}{2}$ convient.
En effet, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n + \dfrac{1}{2} = 3\alpha_n + \dfrac{3}{2} = 3\left(\alpha_n + \dfrac{1}{2}\right)$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n + \dfrac{1}{2} = 3^n \left(\alpha_0 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3^n}{2}$.
On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = \dfrac{3^n - 1}{2}.}$

(c) On a donc :
$$g^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha_n f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \beta_n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{3^n - 1}{2} \begin{pmatrix} x - y \\ -x + y \\ 2x + 2y + 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\boxed{g^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} x + \dfrac{3 - 3^n}{2} y \\ \dfrac{3 - 3^n}{2} x + \dfrac{3^n + 1}{2} y \\ (3^n - 1)x + (3^n - 1)y + 3^n z \end{pmatrix}}$

5. (a) On a : $g \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n - v_n \\ -u_n + 2v_n \\ 2u_n + 2v_n + 3w_n \end{pmatrix}$.

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}}$

(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = g^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Initialisation : On a : $g^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = g^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.
On a : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = g \left(g^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \right) = g^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.
La propriété est donc héréditaire.

Donc : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = g^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = g^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n + 1}{2} \\ \dfrac{3 - 3^n}{2} \\ (3^n - 1) + 3^n \end{pmatrix}$.

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_n = \dfrac{3^n + 1}{2} \\ v_n = \dfrac{3 - 3^n}{2} \\ w_n = 2.3^n - 1 \end{cases}}$