Lycée Gustave Eiffel — Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 — DS n°1
24 septembre 2011 — Durée 3h

Exercice 1 : Une équation trigonométrique

On résout l'équation :

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{3} \quad (E)$$

On a :
$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right)\\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)\\ &= 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

Donc :
$$\begin{aligned}(E) &\iff 2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\\ &\iff \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &\iff x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } x+\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}[2\pi]\\ &\iff x = 0[2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{aligned}$$

> On en déduit que les solutions de l'équation (E) sont les nombres de la forme :
> $$x = 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 2 : Une inéquation trigonométrique

Notons (E) : $-2\cos^2 x - 3\sin x + 3 \geq 0$.
Or : $-2\cos^2 x - 3\sin x + 3 = -2(1-\sin^2 x) - 3\sin x + 3 = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$
d'où : $(E) \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \geq 0$
On pose $X = \sin x$ et on introduit (F) : $2X^2 - 3X + 1 \geq 0$
1 est une racine évidente de $P(X) = 2X^2 - 3X + 1$.
L'autre racine est $\frac{1}{2}$ car le produit vaut $\frac{1}{2}$ d'après les relations coefficients-racines.

X	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$P(X)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi : $(F) \Leftrightarrow X \leq \frac{1}{2}$ ou $X \geq 1$

D'où : $(E) \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{1}{2}$ ou $\sin x \geq 1$

$(E) \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

> Bilan : Les solutions de (E) sont telles que :
> $$-\frac{7\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 3 : Linéarisation

Première méthode : Avec les formules de trigonométrie...

On a :
$$\begin{aligned}\sin^2(x)\cos(x) &= \frac{1}{2}(2\sin(x)\cos(x))\sin(x)\\ &= \frac{\sin(2x)\sin(x)}{2}\\ &= \frac{\cos(2x-x) - \cos(2x+x)}{4}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\sin^2(x)\cos(x) = \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(3x)}$

Deuxième méthode : A l'aide des nombres complexes...

On a :
$$\begin{aligned}\sin^2(x)\cos(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\\ &= -\frac{1}{8}(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})(e^{ix} + e^{-ix})\\ &= -\frac{e^{3ix} - e^{ix} - e^{-ix} + e^{-3ix}}{8}\\ &= -\frac{2\cos(3x) - 2\cos(x)}{8}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\sin^2(x)\cos(x) = \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(3x)}$

Exercice 4 : Calcul d'une somme trigonométrique

1 . D'après la formule de Moivre, $\cos(3x) + i\sin(3x) = \big(\cos x + i\sin x\big)^3$
$\cos(3x) + i\sin(3x) = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x$
En égalant les parties imaginaires : $\sin(3x) = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$
Comme $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, on a :
$\boxed{\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x}$

2 . D'après la question 1, $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ pour tout réel θ.
Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la relation (1) à $\theta = \frac{x}{3^{k+1}}$, on a :

$$\boxed{\sin\left(\frac{x}{3^k}\right) = 3\sin\frac{x}{3^{k+1}} - 4\sin^3\frac{x}{3^{k+1}}}$$

3 . Comme $\sin^3\dfrac{x}{3^{k+1}} = -\dfrac{1}{4}\left(\sin\dfrac{x}{3^k} - 3\sin\dfrac{x}{3^{k+1}}\right)$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3\frac{x}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} 3^k\left[-\frac{1}{4}\left(\sin\frac{x}{3^k} - 3\sin\frac{x}{3^{k+1}}\right)\right]$$

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3\frac{x}{3^{k+1}} = -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(3^k\sin\frac{x}{3^k} - 3^{k+1}\sin\frac{x}{3^{k+1}}\right)$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(3^k\sin\frac{x}{3^k} - 3^{k+1}\sin\frac{x}{3^{k+1}}\right)$ est une somme télescopique, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3\frac{x}{3^{k+1}} = -\frac{1}{4}\left(\sin x - 3^{n+1}\sin\frac{x}{3^{n+1}}\right)}$$

rmq : On peut aussi prouver ce résultat par récurrence.

Exercice 5 : Une équation

On résout :

$$\sqrt{x} = -2 + x \quad (E)$$

L'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}^+$.

On a : $(E) \iff x = (-2+x)^2$ et $-2+x \geq 0$.

$\iff x = x^2 - 4x + 4$ et $x \geq 2$

$\iff x^2 - 5x + 4 = 0$ et $x \geq 2$

$\iff (x-1)(x-4) = 0$ et $x \geq 2$

$\iff (x = 1$ ou $x = 4)$ et $x \geq 2$

$\iff x = 4$

$\boxed{\text{L'unique solution de l'équation est : 4.}}$

Exercice 6 : Une équivalence

$\Rightarrow$ Supposons que $x = 0$

d'où pour tout $\varepsilon > 0$, $|0| < \varepsilon$ est immédiat

$\Leftarrow$ Procédons par contraposition. Supposons que $x \neq 0$.

$\dfrac{|x|}{2} > 0$ vérifie $\dfrac{|x|}{2} \leq |x|$

En posant $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq |x|$.

$\boxed{\text{Bilan : } x = 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, |x| < \varepsilon)}$

Exercice 7 : Une proposition quantifiée

1 . La négation de P est $\boxed{\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq 0}$

2 . La négation de P est vraie car $x = -1$ vérifie $x \leq 0$.

Par conséquent, P est fausse.

Exercice 8 : Racines d'un polynôme de degré 3

1. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $(x + \mathrm{i}y)^2 = -3 - 4\mathrm{i} \quad (E)$.
   On a : $|-3+4\mathrm{i}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

   Donc : $(E) \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

   $\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ xy = -2 \\ 2y^2 = 8 \end{cases}$

   $\iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ xy = -2 \\ y = 2 \text{ ou } y = -2 \end{cases}$

   $\iff (x = 1$ et $y = -2)$ ou $(x = -1$ ou $y = 2)$

   $\boxed{\text{Les racines carrées de } -3-4\mathrm{i} \text{ sont donc : } 1-2\mathrm{i} \text{ est } -1+2\mathrm{i}.}$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a : $P(\mathrm{i}y) = y^3 - (-1+4\mathrm{i})y^2 + (3\mathrm{i}-7)y + 2 + 10\mathrm{i}$.
   $= (y^3 + y^2 - 7y + 2) + \mathrm{i}(-4y^2 + 3y + 10)$

   Donc : $P(\mathrm{i}y) = 0 \iff \begin{cases} y^3 + y^2 - 7y + 2 = 0 \\ -4y^2 + 3y + 10 = 0 \end{cases}$.

   Or : $-4y^2 + 3y + 10 = (y-2)(-4y-5) = -4(y-2)\left(y + \dfrac{5}{4}\right)$.

   De plus : si $y = 2$, alors : $y^3 + y^2 - 7y + 2 = 8 + 4 - 14 + 2 = 0$

   et si $y = -\dfrac{5}{4}$, alors : $y^3 + y^2 - 7y + 2 = -\dfrac{125}{64} + \dfrac{25}{16} + \dfrac{35}{4} + 2 = \dfrac{663}{64}$.

   D'où : $P(\mathrm{i}y) = 0 \iff y = 2$.

   $\boxed{\text{L'unique imaginaire pur tel que } P(z) = 0 \text{ est } z = 2\mathrm{i}.}$

3. On a : $P(z) = (z - 2\mathrm{i})(\mathrm{i}z^2 + (-3+4\mathrm{i})z + \mathrm{i} - 5)$.
   Le discriminant de $\mathrm{i}z^2 + (-3+4\mathrm{i})z + \mathrm{i} - 5$ est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3+4\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}(\mathrm{i}-5)\\ &= -3-4\mathrm{i} = (1-2\mathrm{i})^2\end{aligned}$$

Les racines de $\mathrm{i}z^2+(-3+4\mathrm{i})z+\mathrm{i}-5$ sont donc :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{3-4\mathrm{i}+1-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} & \text{et } z_2 &= \frac{3-4\mathrm{i}-1+2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\\ &= \frac{4-6\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} & &= \frac{2-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\\ &= -3-2\mathrm{i} & &= -1-\mathrm{i}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont donc : } 2\mathrm{i},\ -3-2\mathrm{i} \text{ et } -1-\mathrm{i}.}$

Exercice 9 : Une suite d'entiers

1 . On a : $|a|=2$. D'où : $\dfrac{a}{|a|} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.

Donc une forme trigonométrique de a est $\boxed{a = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}$

Comme $b = 1-i\sqrt{3} = \overline{a}$, on a : $\boxed{b = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}}$

2 . a . Soit un entier naturel n.

On a : $\alpha_n = (1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n$
$= a^n + \overline{a}^n = a^n + \overline{a^n}$

Comme $Z+\overline{Z} = 2\mathrm{Re}(Z)$, on obtient $\alpha_n = 2\mathrm{Re}(a^n)$.

$\boxed{\text{Bilan : } \alpha_n \text{ est un réel pour tout entier naturel } n}$

b . $\alpha_n = \left(2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n + \left(2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n$

Or $\left(2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n + \left(2\mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{3}}\right)^n = 2^n\left(\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-i\frac{n\pi}{3}}\right) = 2^n \times 2\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$

d'où $\boxed{\alpha_n = 2^{n+1}\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)}$

<u>1er cas</u> : $n = 3p$ où $p\in\mathbb{N}$

On a : $\alpha_{3p} = 2^{3p+1}\cos\left(\dfrac{3p\pi}{3}\right)$

Or $\cos\left(\dfrac{3p\pi}{3}\right) = \cos(p\pi) = (-1)^p$ (qui vaut +1 si p pair et -1 si p impair),

on a donc : $\boxed{\alpha_{3p} = 2^{3p+1}(-1)^p \in\mathbb{Z}}$

<u>2ème cas</u> : $n = 3p+1$ où $p\in\mathbb{N}$

On a : $\alpha_{3p+1} = 2^{3p+2}\cos\left(p\pi + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Or $\cos\left(p\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = (-1)^p\cos\dfrac{\pi}{3} = (-1)^p\dfrac{1}{2}$, on a donc : $\boxed{\alpha_{3p+1} = 2^{3p+1}(-1)^p \in\mathbb{Z}}$

<u>3ème cas</u> : $n = 3p+2$ où $p\in\mathbb{N}$

On a : $\alpha_{3p+2} = 2^{3p+3}\cos\left(p\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right)$

Or $\cos\left(p\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right) = (-1)^p\cos\dfrac{2\pi}{3} = (-1)^{p+1}\dfrac{1}{2}$, on a donc : $\boxed{\alpha_{3p+1} = 2^{3p+2}(-1)^{p+1} \in\mathbb{Z}}$

$\boxed{\text{Bilan : } \forall n\in\mathbb{N},\ \alpha_n\in\mathbb{Z}}$

Exercice 10 : Racines d'un polynôme de degré 2 ayant même module

1. On a : $$\begin{aligned} Z+\frac{1}{Z}\in\mathbb{R} &\iff Z+\frac{1}{Z} = \bar{Z}+\frac{1}{\bar{Z}}\\ &\underset{L_1\longrightarrow Z\bar{Z}L_1}{\iff} Z^2\bar{Z}+\bar{Z} = Z\bar{Z}^2+Z\\ &\iff Z^2\bar{Z} - Z\bar{Z}^2 + \bar{Z} - Z = 0\\ &\iff (Z-\bar{Z})(Z\bar{Z}-1) = 0\\ &\iff Z=\bar{Z} \text{ ou } Z\bar{Z}=1\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On en déduit que : } Z+\dfrac{1}{Z} \text{ est réel} \iff Z \text{ est réel ou } |Z|=1.}$

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
La fonction f est une somme de fonctions dérivables. Elle est donc dérivable.
De plus : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-2	↘	‖	↘	2	↗	

D'après ce tableau de variations, la fonction f admet -2 pour maximum sur $\mathbb{R}^{-*}$ et 2 pour minimum sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Ainsi, } \left|x+\dfrac{1}{x}\right| \text{ admet 2 pour minimum sur } \mathbb{R}^*. \\ \text{Il est atteint en } x=1 \text{ et en } x=-1.\end{array}}$$

3. D'après les relations coefficients-racines, on a : $\boxed{\begin{cases} z_1+z_2=2a \\ z_1z_2=b \end{cases}}$

4. Il existe (r_1,θ_1) et (r_2,θ_2) deux éléments de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ tel que : $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ et $z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$.
   Or : $|z_1|=|z_2|$. Donc, $r_1=r_2$. On pose : $r=|r_1|=|r_2|$.
   On a alors : $\boxed{z_1=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \text{ et } z_2=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}.}$
   On a : $z_1+z_2=2a$.
   Donc : $a=\dfrac{z_1+z_2}{2}$.
   D'où :
   $$\begin{aligned}\frac{a^2}{b} &= \frac{(z_1+z_2)^2}{4z_1z_2} = \frac{\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\right)^2}{4r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} \\ &= \frac{r^2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\right)^2}{4r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1+\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_1}+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1+\mathrm{i}\theta_2}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_2}}{4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1+\mathrm{i}\theta_2}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}+2+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)}}{4} = \frac{2\cos(\theta_1-\theta_2)+2}{4} \\ &= \frac{1+\cos(\theta_1-\theta_2)}{2}\end{aligned}$$
   Or : $-1\leq\cos(\theta_1-\theta_2)\leq 1$.
   Donc : $0\leq\dfrac{a^2}{b}\leq 1$.
   Or, a et b sont non nuls.
   D'où : $\boxed{\dfrac{a^2}{b}\in]0,1].}$

5. On suppose que : $\dfrac{a^2}{b}\in]0,1]$.
   On pose : $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.
   On a : $Z+\dfrac{1}{Z}=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2}$.
   Or : $\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{(z_1+z_2)^2}{4z_1z_2}=\dfrac{z_1^2+2z_1z_2+z_2^2}{4z_1z_2}=\dfrac{1}{4}\left(Z+\dfrac{1}{Z}\right)+\dfrac{1}{2}$.
   Ainsi : $0<\dfrac{1}{4}\left(Z+\dfrac{1}{Z}\right)+\dfrac{1}{2}\leq 1$.
   D'où : $-2<Z+\dfrac{1}{Z}\leq 2$.
   En particulier, $Z+\dfrac{1}{Z}$ est un réel.
   Par la question 1, Z est un réel ou $|Z|=1$.
   Par la question 2, si Z est un réel, alors $\left|Z+\dfrac{1}{Z}\right|\geq 2$ avec égalité si, et seulement si, $Z=1$ ou $Z=-1$.
   Donc, si Z est réel, $Z=1$ ou $Z=-1$.
   Dans tous les cas, on a donc : $|Z|=1$.
   Or : $|Z|=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.
   D'où : $|z_1|=|z_2|$.
   $$\boxed{\text{On en déduit que si } \dfrac{a^2}{b}\in]0,1], \text{ alors } |z_1|=|z_2|.}$$