Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 DS n°2
15 octobre 2011 Durée 4h

Exercice 1 : Une équation

---

1. On a la définition suivante :

> **Définition 1.** *Soit $z \in \mathbb{C}$.*
> *On dit que z est une racine $5^{\text{ème}}$ de l'unité si $z^5 = 1$.*

On a la proposition suivante :

> **Proposition 1.** *Les racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité sont les nombres complexes de la forme : $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4\}$.*
> *i.e. les racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité sont 1, $e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $e^{\frac{4i\pi}{5}}$, $e^{\frac{6i\pi}{5}}$ et $e^{\frac{8i\pi}{5}}$.*

2. On a : $P(z) = 0 \iff (z+i)^5 = (z-i)^5$
$\iff \exists k \in \{0,1,2,3,4\} \quad z + i = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(z-i)\ (E_k)$
Soit $k \in \{0,1,2,3,4\}$.
On a : $(E_k) \iff (e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1)z = i(e^{\frac{2ik\pi}{5}} + 1)$.
On traite deux cas :
   (a) si $k \neq 0$:
   On a : $e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1 \neq 0$.
   Donc : $(E_k) \iff z = \dfrac{i(e^{\frac{2ik\pi}{5}}+1)}{e^{\frac{2ik\pi}{5}}-1} = \dfrac{i(e^{\frac{ik\pi}{5}} + e^{-\frac{ik\pi}{5}})}{e^{\frac{ik\pi}{5}} - e^{-\frac{ik\pi}{5}}}$
   $= \dfrac{2i\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)}$
   (b) si $k = 0$:
   On a : $e^{\frac{2ik\pi}{5}} - 1 = 0$.
   Donc : $(E_k) \iff 0 = 2i$.
   L'équation (E_0) n'a pas de solution.

> On en déduit que les solutions de (E) sont :
> $$\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)},\ \frac{1}{\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)},\ \frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)} \text{ et } \frac{1}{\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)}$$
> Les solutions de (E) sont bien réelles.

3. On a : $P(X) = \dfrac{1}{2i}\left((X+i)^5 - (X-i)^5\right) = \dfrac{1}{2i}\left((X^5 + 5iX^4 - 10X^3 - 10iX^2 + 5X + i) - (X^5 - 5iX^4 - 10X^3 + 10iX^2 + 5X - i)\right)$.
On en déduit que : $\boxed{P(X) = 5X^4 - 10X^2 + 1}$
On résout l'équation : $5X^4 - 10X^2 + 1 = 0 \quad (E')$.
On pose $Y = X^2$.
On a $(E') \iff 5Y^2 - 10Y + 1 = 0 (E'')$.
Le discriminant de (E'') est $10^2 - 4.5 = 80 = (4\sqrt{5})^2$.
Les solutions de (E'') sont $\dfrac{10+4\sqrt{5}}{10} = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}$ et $\dfrac{10-4\sqrt{5}}{10} = \dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}$.
On a : $\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
et : $\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$

> On en déduit que racines de (P) sont : $\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$, $-\dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$, $\dfrac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$ et $-\dfrac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$.

4. On a : $\dfrac{\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\dfrac{2\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
et : $\dfrac{\pi}{5} < \dfrac{2\pi}{5}$.
Donc : $0 \leq \tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) < \tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
Or, les inverses de ces deux nombres sont des racines de P.
De plus : $\dfrac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} < \dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
et ce sont les racines positives de P.
On en déduit : $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{25+10\sqrt{5}}} = \dfrac{5\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$
Donc : $\boxed{\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}}$
et : $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{5}{\sqrt{25-10\sqrt{5}}} = \dfrac{5\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$
Donc : $\boxed{\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5+2\sqrt{5}}}$

5. (a) On pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
   On a alors : $\boxed{\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$ et $\boxed{\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}}$
   (b) On pose : $t = \tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

On a alors : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{1-(5-2\sqrt{5})}{1+(5-2\sqrt{5})} = \dfrac{2(\sqrt{5}-2)(3+\sqrt{5})}{2(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$

D'où : $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$

On a également : $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{1+(5-2\sqrt{5})}$

$$= \frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})^2(5-2\sqrt{5})}}{4}$$

D'où : $\boxed{\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$

Exercice 2 : Étude d'une transformation du plan

1. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$.

   On a : $z' = 1 \iff \dfrac{z-\mathrm{i}}{\bar{z}+\mathrm{i}} = 1 \iff z-\mathrm{i} = \bar{z}+i \iff z-\bar{z} = 2\mathrm{i}$

   On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels.

   On a alors : $z' = 1 \iff 2\mathrm{i}y = 2\mathrm{i} \iff y = 1$.

   $\boxed{\text{L'ensemble des points M tels que } z' = 1 \text{ est donc la droite (D) d'équation } y = 1 \text{ privée du point B.}}$

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i}\}$.

   On a : $|z'| = \left|\dfrac{z-\mathrm{i}}{\bar{z}+\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|z-\mathrm{i}|}{|\bar{z}+\mathrm{i}|} = \dfrac{|z-\mathrm{i}|}{|\overline{z-\mathrm{i}}|} = \dfrac{|z-\mathrm{i}|}{|z-\mathrm{i}|} = 1$.

   D'où : $\boxed{z' \in \mathbb{U}}$

   $\boxed{\text{Géométriquement, tous les points } M' \text{ d'affixe } z' \text{ sont sur le cercle } (C) \text{ de centre O et de rayon 1.}}$

   (b) Soit M un point du plan tel que $M \notin D$ ie M d'affixe z tel que $\mathrm{Im}(z) \neq 1$.

   On a : $\overline{\left(\dfrac{z'-1}{z-\mathrm{i}}\right)} = \dfrac{\bar{z}'-1}{\bar{z}+\mathrm{i}}$

   Or : $z' = \dfrac{z-\mathrm{i}}{\bar{z}+\mathrm{i}}$. Donc : $\bar{z}+\mathrm{i} = \dfrac{z-\mathrm{i}}{z'}$.

   D'où : $\overline{\left(\dfrac{z'-1}{z-i}\right)} = \dfrac{\bar{z}'-1}{z-\mathrm{i}}.z' = \dfrac{\bar{z}'z'-z'}{z-\mathrm{i}}$.

   Or : $\bar{z}'z' = |z'|^2 = 1$ car $z' \in \mathbb{U}$. D'où : $\overline{\left(\dfrac{z'-1}{z-\mathrm{i}}\right)} = -\dfrac{z'-1}{z-\mathrm{i}}$

   $\boxed{\dfrac{z'-1}{z-i} \text{ est un imaginaire pur.}}$

   $z'-1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM'}$ et $z-\mathrm{i}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$.

   Ainsi, $\dfrac{z'-1}{z-i}$ est un imaginaire pur .

   Donc : $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

   $\boxed{\text{On en déduit que les droites } (AM') \text{ et } (BM) \text{ sont perpendiculaires.}}$

   (c) Soit M un point du plan tel que $M \notin (D)$.

   $\boxed{\text{Alors, d'après ce qui précède, } M' \text{ est le point d'intersection (autre que } A\text{) de la droite passant par } A \text{ et perpendiculaire à } (BM) \text{ et du cercle } (C).}$

   Lorsque M est un point de (D) privé du point B, la droite passant par A et perpendiculaire à (BM) est la tangente à (C) en A. $\boxed{\text{Dans ce cas, } M' = A.}$

3. (a) Soit P un point du cercle (C) distinct du point A.

   $\boxed{\text{L'ensemble } E \text{ des points } M \text{ tels que } M' = P \text{ est la droite } \Delta \text{ privée du point } B \text{ passant par } B \text{ et perpendiculaire à } (AP).}$

   (b) On a : $z^3 = 1 \iff \exists k \in \{0,1,2\} \quad z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{3}}$

   $$\iff z = 1 \text{ ou } z = j \text{ ou } z = j^2 \quad (\text{enposant} j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}})$$

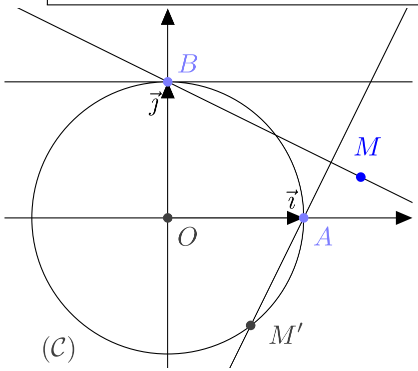
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^3 = 1 \text{ est } 1,\ j \text{ et } j^2.}$

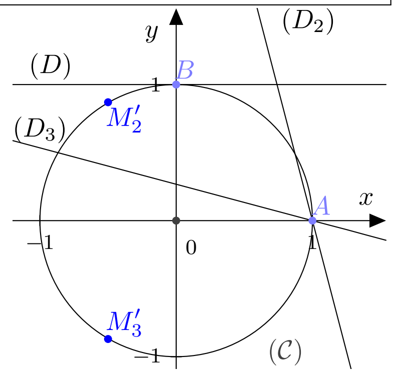
   (c) Si $z' = 1$, d'après la question 1, l'ensemble des points M est la droite (D) privée du point B.

   Si $z' = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$, l'ensemble des points M est la droite (D_2) passant par A et perpendiculaire à (BM_2') où M_2' d'affixe $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

   Si $z' = \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}$, l'ensemble des points M est la droite (D_3) passant par A et perpendiculaire à (BM_3') où M_3' d'affixe $\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}$.

   $\boxed{\text{L'ensemble } F \text{ des points } M \text{ est l'union des droites } (D),\ (D_2) \text{ et } (D_3) \text{ privée du point } B.}$





Exercice 3 : Étude de la limite d'une somme de fonctions

1. On a : $\dfrac{\text{th}(x)}{x} = \dfrac{\text{th}(x)-\text{th}(0)}{x-0}$.
   Or, la fonction th est dérivable en 0 et $\text{th}'(0) = 1 - \text{th}^2(0) = 1$.
   D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\text{th}(x)}{x} = 1}$
2. On a : $e^{2x} = (e^x)^2 = (\text{ch}(x)+\text{sh}(x))^2 = \text{ch}^2(x) + 2\text{sh}(x)\text{ch}(x) + \text{sh}^2(x)$.
   Les fonctions $(x \mapsto \text{ch}(2x))$ et $(x \mapsto \text{sh}(2x))$ sont les parties paire et impaire de la fonction $(x \mapsto e^{2x})$.
   Par conséquent, on obtient : $\boxed{\begin{array}{l}\text{ch}(2x) = \text{ch}^2(x)+\text{sh}^2(x)\\ \text{sh}(2x) = 2\text{sh}(x)\text{ch}(x)\end{array}}$
3. On a : $\text{th}(2x) = \dfrac{\text{sh}(2x)}{\text{ch}(2x)} = \dfrac{2\text{sh}(x)\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)+\text{sh}^2(x)} = \dfrac{\frac{2\text{sh}(x)\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)}}{\frac{\text{ch}^2(x)+\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)}} = \dfrac{2\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}}{1+\frac{\text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)}}$
   On aboutit donc à : $\boxed{\text{th}(2x) = \dfrac{2\text{th}(x)}{1+\text{th}^2(x)}}$
4. En remplaçant x dans l'inégalité précédente par $\dfrac{x}{2^k}$, on obtient : $\text{th}\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right) = \dfrac{2\text{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{1+\text{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)}$.
   En remarquant que $\text{th}\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right) \neq 0$, on peut écrire : $\boxed{1+\text{th}^2\left(\dfrac{x}{2^k}\right) = 2\dfrac{\text{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\text{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}}$
   Par conséquent, $\underline{a = \dfrac{x}{2^k}}$ et $\underline{b = \dfrac{x}{2^{k-1}}}$ conviennent.
5. On injecte la formule précédente dans l'expression de S_n.
   On a alors :
   $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\text{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(2\frac{\text{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\text{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(2) + \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right)\end{aligned}$$
   La première somme est élémentaire. La seconde somme est une somme téléscopique.
   On obtient ainsi : $S_n = n\ln(2) + \ln\left(\text{th}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\left(\text{th}(x)\right)$.
   On en déduit : $\boxed{S_n = \ln\left(2^n\text{th}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\left(\text{th}(x)\right)}$
6. On a : $2^n\text{th}\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = x\dfrac{\text{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$
   Or : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$.
   Par la limite établie à la question 1, on a donc : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 2^n\text{th}\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = x$.
   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \ln(x) - \ln\left(\text{th}(x)\right) = \ln\left(\dfrac{x}{\text{th}(x)}\right)}$

Problème 1 : Étude de deux fonctions

Partie A : Étude de la fonction f

1. La fonction f est définie en $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $e^{2x} - e^x + 1 \neq 0$.
   On pose $X = e^x$.
   On a alors : $e^{2x} - e^x + 1 = X^2 - X + 1$.
   Le discriminant de ce polynôme est -3.
   On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{2x} - e^x + 1 > 0 \quad (\sharp)$.
   $\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est } \mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$
2. D'après la proposition $(\sharp)$, la fonction f est du signe de $2e^{2x} - e^x$.
   Or : $2e^{2x} - e^x \geq 0 \iff e^x \geq \dfrac{1}{2} \iff x \geq -\ln(2)$.
   On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3. La fonction exp est dérivable. La fonction f est donc une composée de fonctions dérivables.
   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc dérivable.}}$
4. On a : $f(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$.
   Or $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} e^x = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} e^{2x} = 0$.
   D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 0}$
   On a : $f(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \dfrac{2 - e^{-x}}{1 - e^{-x} + e^{-2x}}$.
   Or : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^{-2x} = 0$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=2}$

$\boxed{\text{On en déduit que le graphe de } f \text{ admet une asymptote en } +\infty \text{ d'équation } y=2 \text{ et une asymptote en } -\infty \text{ d'équation } y=0.}$

5. On a : $f'(x)=\dfrac{(4\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x})(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1)-(2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x})(2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x})}{(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1)^2}$

$$=\frac{-\mathrm{e}^{3x}+4\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1)^2}=-\frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^{x}+1)}{(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1)^2}.$$

On pose $X=\mathrm{e}^{x}$.
On a : $\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^{x}+1=X^2-4X+1=(X-2)^2-3=\big(X-(2+\sqrt{3})\big)\big(X-(2-\sqrt{3})\big)$.
On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln(2-\sqrt{3})$		$-\ln(2)$	0	$\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^{x}+1$		$+$	0	$-$			0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	0	1	$\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	2

6. D'après l'étude du signe de f, le graphe de f intersecte l'axe des abscisses uniquement en $x=-\ln(2)$.
Or : $f'(-\ln(2))=-\dfrac{\mathrm{e}^{-\ln(2)}\big(\mathrm{e}^{-2\ln(2)}-4\mathrm{e}^{-\ln(2)}+1\big)}{\big(\mathrm{e}^{-2\ln(2)}-\mathrm{e}^{-\ln(2)}+1\big)^2}=-\dfrac{\frac{1}{2}\big(\frac{1}{4}-2+1\big)}{\big(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1\big)^2}$

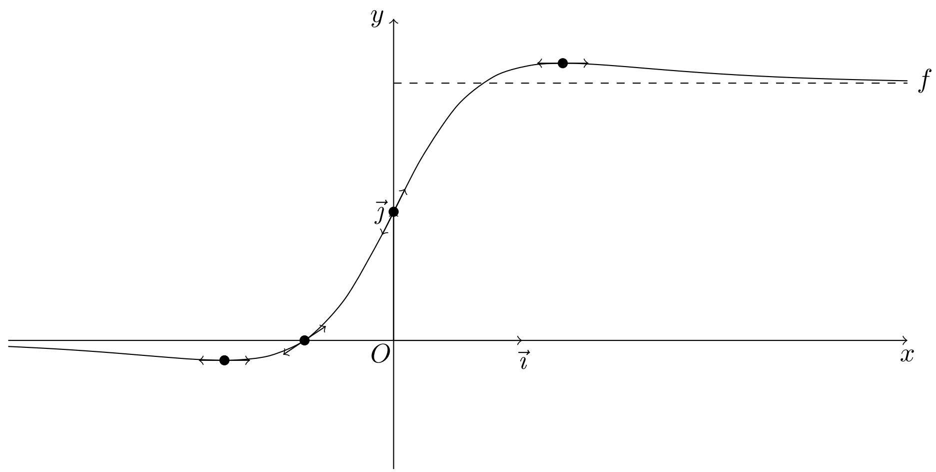
$$=-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le graphe de } f \text{ intersecte donc l'axe des abscisses uniquement au point } (-\ln(2),0).\\ \text{La tangente du graphe de } f \text{ en ce point admet pour équation } y=\dfrac{2}{3}(x+\ln(2)).\end{array}}$

Le graphe de f intersecte l'axe des ordonnées en $x=0$.
Or : $f(0)=1$ et $f'(0)=2$.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le graphe de } f \text{ intersecte donc l'axe des abscisses uniquement au point } (0,1).\\ \text{La tangente du graphe de } f \text{ en ce point admet pour équation } y=2x+1.\end{array}}$

7. On a le graphe suivant :



Partie B : Étude de la fonction F

1. Par (♯), on a : $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1>0$.
$\boxed{\text{Le domaine de définition de } F \text{ est donc } \mathbb{R}.}$
2. La fonction F est une composée de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est donc une fonction de classe } \mathcal{C}^\infty.}$
3. On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\mathrm{e}^{2x}=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$.
Donc : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\ln(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1)=\ln(1)=0$.
D'où : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f(x)=-1$.
$\boxed{\text{Le graphe de } f \text{ admet donc en } -\infty \text{ une asymptote d'équation } y=-1.}$
On a : $f(x)=\ln(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1)-1=\ln\big(\mathrm{e}^{2x}(1-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})\big)-1$
$$=2x-1+\ln(1-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}).$$
Or : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\mathrm{e}^{-2x}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$.
Donc : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\ln(1-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})=0$.

$\boxed{\text{On en déduit que le graphe de } f \text{ admet une asymptote d'équation } y=2x-1 \text{ en } +\infty.}$

4. On a : $F'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1} = f(x)$.
   D'après l'étude du signe de f, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
$f(x)$	-1	$\searrow$	$\ln\left(\dfrac{3}{4}\right) - 1$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

5. On a : $F(0) = \ln(1) - 1 = -1$ et : $F'(0) = f(0) = 1$.

   On en déduit que la tangente au graphe de F en 0 admet pour équation $y = x - 1$.

6. La fonction f est décroissante sur $]-\infty, \ln(2-\sqrt{3})]$ et sur $[\ln(2+\sqrt{3}), +\infty[$. Elle est croissante sur $[\ln(2-\sqrt{3}), \ln(2+\sqrt{3})]$.
   Or $F' = f$.

   La fonction F est donc concave sur $]-\infty, \ln(2-\sqrt{3})]$ et sur $[\ln(2+\sqrt{3}), +\infty[$.
   Elle est convexe sur $[\ln(2-\sqrt{3}), \ln(2+\sqrt{3})]$.
   Elle admet donc des points d'inflexion en $\ln(2-\sqrt{3})$ et $\ln(2+\sqrt{3})$.

7. On a la figure suivante :