Lycée Gustave Eiffel Année 2010-2011
Mathématiques PTSI 2 Devoir Surveillé n°4
14 janvier 2012 Durée 2h

Exercice 1 : Détermination d'une asymptote

1. On a : $x^2+x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$. Donc : $\sqrt{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x^2}$.
   Pour $x>0$, on a : $\sqrt{x^2}=x$. D'où : $\sqrt{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
   Donc : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x}$. On en déduit : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x}$

2. (a) On a : $\boxed{\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x}$

   (b) On a : $f(x)-x = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}} - x = \dfrac{x^2 - x\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
   $$= -\frac{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}$$
   Or, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$.
   Par composition à droite de l'équivalent de la question précédente, on obtient : $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$.
   Or : $\dfrac{1}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. D'où : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
   Donc : $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.
   D'autre part, on a : $\sqrt{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
   D'où : $f(x)-x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x^2\cdot\frac{1}{2x}}{x} = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)-x = -\dfrac{1}{2}$.
   $$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc une asymptote d'équation } y = x-\frac{1}{2}.}$$

Exercice 2 : Des droites, des plans et une famille de points

1. Le point $N(t)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a(t)\\ b(t)\\ c(t)\end{pmatrix}$.
   On a : $a(t)+c(t) = \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{2}} - \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{2}} = 0$.
   $\boxed{\text{On en déduit que le point } N(t) \text{ appartient au plan } P.}$

2. Soit $M\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. On a : $M\in P\cap Q \iff \begin{cases} x+z=0\\ x+y+z-3=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=-z\\ y=3\end{cases}$
   $$\boxed{\text{La droite } D \text{ est donc paramétrée par : } \begin{cases} x=-t\\ y=3\\ z=t\end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.}$$

3. On a : $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t) = \left(\dfrac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sin^2(t) + \left(-\dfrac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\right)^2 = \cos^2(t)+\sin^2(t)$.
   Donc : $\boxed{a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)=1}$
   Le point $N(t)$ est donc un point de la sphère S de centre O et de rayon 1.
   Ainsi, $N(t)\in P\cap S$. De plus, $O\in P$.
   $\boxed{\text{On en déduit que } N(t) \text{ est un point du cercle de plan } P, \text{ de centre } O \text{ et de rayon 1.}}$

4. La droite D passe par le point $A\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ d'après la représentation paramétrique de D,.
   On a : $d(N(t),D) = \dfrac{\|\overrightarrow{AN(t)}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.
   Or : $\overrightarrow{AN(t)}\begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\\ \sin(t)-3\\ -\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.
   Donc : $\overrightarrow{AN(t)}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}\sin(t)-3\\0\\ \sin(t)-3\end{pmatrix}$.
   D'où : $\|\overrightarrow{AN(t)}\wedge\vec{u}\| = \sqrt{2}|\sin(t)-3|$.
   De plus : $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$.
   D'où : $\boxed{d(N(t),D) = |\sin(t)-3|}$
   On a : $d(N(t),Q) = \dfrac{|a(t)+b(t)+c(t)-3|}{\sqrt{3}}$.
   D'où : $\boxed{d(N(t),Q) = \dfrac{|\sin(t)-3|}{\sqrt{3}}}$
   Et on a donc : $\boxed{\dfrac{d(N(t),D)}{d(N(t),Q)} = \sqrt{3}}$

5. (a) On a : $\begin{cases} x-2my+4m-1=0 \\ y+z+3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=2my-4m+1 \\ z=-y-3 \end{cases}$.

Δ_m a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=2mt-4m+1 \\ y=t \\ z=-t-3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\Delta_m \text{ est donc la droite passant par } A_m \begin{pmatrix} 1-4m \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et de vecteur directeur } \vec{u}_m \begin{pmatrix} 2m \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$

(b) Les droites D et Δ_m sont coplanaires si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AA_m}$, $\vec{u}$ et $\vec{u}_m$ sont coplanaires. si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{AA_m}, \vec{u}, \vec{u}_m) = 0$.

Or : $\overrightarrow{AA_m} \begin{pmatrix} 1-4m \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Donc : $\det(\overrightarrow{AA_m}, \vec{u}, \vec{u}_m) = \begin{vmatrix} 1-4m & -1 & 2m \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Donc : $\det(\overrightarrow{AA_m}, \vec{u}, \vec{u}_m) = (1-4m)\times(-1) - (-3)\times(1-2m) - 3(-1)$
$= -2m+5$

$\boxed{\text{Les droites } D \text{ et } \Delta_m \text{ sont donc coplanaires si, et seulement si, } m = \frac{5}{2}.}$

(c) Pour $m = \frac{5}{2}$, on a : $\vec{u}_m \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_m$ sont non colinéaires.

Le plan R est donc le plan passant par A et de base $(\vec{u}, \vec{u}_m)$.

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.

On a : $M \in R \iff \overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{u_m}$ sont coplanaires

$\iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u}_m) = 0$

Or : $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ z \end{pmatrix}$. D'où : $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u}_m) = \begin{vmatrix} x & -1 & 5 \\ y-3 & 0 & 1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix}$

D'où : $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u}_m) = x\times(-1) - (y-3)\times(-4) + z\times(-1)$
$= -x+4y-z-12$

$\boxed{\text{Une équation du plan } R \text{ est donc } : -x+4y-z-12=0.}$

(d) D'après son équation, le plan P admet un vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La droite Δ_m est parallèle au plan P si, seulement si, $\vec{u}_m$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Or : $\vec{u}_m.\vec{n} = 2m-1$.

$\boxed{\text{La droite } \Delta_m \text{ est donc parallèle au plan } P \text{ si, et seulement si } m = \frac{1}{2}.}$

(e) Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On a : $M \in \bigcap_{m\in\mathbb{R}} \Delta_m \iff \forall m \in \mathbb{R} \quad M \in \Delta_m$

$\iff \forall m \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x-2my+4m-1=0 \\ y+z+3=0 \end{cases}$

$\iff \forall m \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} (x-1)+m(-2y+4)=0 \\ y+z+3=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x-1=0 \\ -2y+4=0 \\ y+z+3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-5 \end{cases}$

$\boxed{\text{Le point } B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ est l'unique point par lequel passe toutes les droites } \Delta_m.}$

Exercice 3 : Étude d'une courbe polaire

---

1. ρ est défini en $\theta \iff \cos\theta \neq 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Ainsi $\boxed{D_\rho = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$

Soit $\theta \in D_\rho$.

On a : $\rho(\theta+2\pi) = \dfrac{1}{\cos(\theta+2\pi)} + 2 = \dfrac{1}{\cos(\theta)} + 2 = \rho(\theta)$.

Donc $M(\theta+2\pi)$ et $M(\theta)$ sont confondus.

$\boxed{\text{On étudie } \Gamma \text{ sur } [-\pi,\pi]\backslash\{-\pi/2,\pi/2\} \text{ pour obtenir toute la courbe } \Gamma.}$

Soit $\theta \in \big[-\pi, \pi\big] \backslash \{-\pi/2, \pi/2\}$.

On a : $\rho(-\theta) = \dfrac{1}{\cos(-\theta)} + 2 = \dfrac{1}{\cos(\theta)} + 2 = \rho(\theta)$.

> On étudie Γ sur $\big[0, \frac{\pi}{2}\big[\cup \big]\frac{\pi}{2}, \pi\big]$.
> Et on obtient Γ sur $\big[-\pi, -\frac{\pi}{2}\big[\cup \big]-\frac{\pi}{2}, 0\big]$ en effectuant une symétrie d'axe (Ox).

2. La fonction ρ est composée de fonctions dérivables. Elle est donc dérivable.
De plus : $\forall \theta \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big[\cup \big]\frac{\pi}{2}, \pi\big] \quad \rho'(\theta) = -\dfrac{-\sin\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$
Ainsi, $\rho'(\theta)$ est du signe de $\sin(\theta)$.
Or : $\forall \theta \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big[\cup \big]\frac{\pi}{2}, \pi\big]\ \sin(\theta) \geq 0$
et, la fonction sin ne s'annule sur cet intervalle qu'en 0 et π.
On résout $\rho(\theta) = 0$ dans $\big[0, \frac{\pi}{2}\big[\cup \big]\frac{\pi}{2}, \pi\big]$:
On a : $\rho(\theta) = 0 \iff \cos(\theta) = -\dfrac{1}{2} \iff \theta = \dfrac{2\pi}{3}$.
D'où le tableau :

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\rho'(\theta)$	0	$+$	||	$+$		$+$	0
ρ	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
signe de ρ		$+$	||	$-$	0	$+$	

On a : $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \cos(\theta) = 0^+$ et $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} \cos(\theta) = 0^-$.
D'où : $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \rho(\theta) = +\infty$ et $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} \rho(\theta) = -\infty$.

3. > Comme $\rho(2\pi/3) = 0$, la tangente à Γ en $M(2\pi/3)$ est dirigée par $\vec{u}(2\pi/3)$.
> Comme $\rho(\pi) = 1$ et $\rho'(\pi) = 0$, la tangente à Γ en $M(\pi)$ est dirigée par $\rho'(\pi)\vec{u}(\pi) + \rho(\pi)\vec{v}(\pi) = \vec{v}(\pi)$ (la tangente en $M(\pi)$ est verticale).

4. On a : $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \rho(\theta) = +\infty$ et $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} \rho(\theta) = -\infty$
Etudions la branche infinie quand θ tend vers $\dfrac{\pi}{2}^-$ et $\dfrac{\pi}{2}^+$.
Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $M(\theta)$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = 1 + 2\cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = \tan(\theta) + 2\sin\theta \end{cases}$$

D'où : $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} x(\theta) = 1$, $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} y(\theta) = +\infty$ et $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} y(\theta) = -\infty$.

> Donc Γ admet pour asymptote verticale la droite Δ d'équation $x = 1$ en $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

5. Soit $\theta \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big[\cup \big]\frac{\pi}{2}, \pi\big]$.
Etudions le signe de $x(\theta) - 1 = 1 + 2\cos(\theta) - 1 = 2\cos(\theta)$.
D'où $x(\theta) - 1 > 0$ pour $\theta \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big[$ et $x(\theta) - 1 < 0$ pour $\theta \in \big]\frac{\pi}{2}, \pi\big]$

> Donc Γ est à droite de l'asymptote verticale Δ si $\theta \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big[$. Et Γ est à gauche de l'asymptote verticale Δ si $\theta \in \big]\frac{\pi}{2}, \pi\big]$

6. Tracé de Γ sur $\big]\frac{\pi}{2}, \pi\big]$