

Exercice 1 : Étude d'une application

1. $f(z)$ existe $\Leftrightarrow z \neq 2i$. Ainsi $D = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$
2. a. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $(x + iy)^2 = 8 - 6i$ (E).
On a : $|8 - 6i| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$.
Donc : (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \xLeftrightarrow^{L_1 \leftarrow L_1 + L_3, L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ xy = -3 \\ 2y^2 = 2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = -3 \\ xy = -3 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow (x = 3 \text{ et } y = -1) \text{ ou } (x = -3 \text{ et } y = 1)$
Les racines carrées de $8 - 6i$ sont donc : $3 - i$ et $-3 + i$.
- b. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.
On a : $f(z) = 1 + i \Leftrightarrow \frac{z^2}{z - 2i} = 1 + i \Leftrightarrow z^2 = (1 + i)(z - 2i)$
 $\Leftrightarrow z^2 - (1 + i)z + 2i - 2 = 0$
Le discriminant est $\Delta = [-(1 + i)]^2 - 4(2i - 2) = 2i - 8i + 8 = -6i + 8 = (3 - i)^2$
Les solutions sont $z_1 = \frac{(1 + i) - (3 - i)}{2} = -1 + i \in D$
et $z_2 = \frac{(1 + i) + (3 - i)}{2} = 2 \in D$
Les antécédents de $1 + i$ par f sont $-1 + i$ et 2 .
3. Soit $h \in \mathbb{C}$. On résout l'équation $f(z) = h$ d'inconnue $z \in D$:
On a : $f(z) = h \Leftrightarrow z^2 = h(z - 2i) \Leftrightarrow z^2 - hz + 2ih = 0$ (F)
Le discriminant $\Delta = h^2 - 8ih = h(h - 8i)$.
Ainsi : $\Delta = 0 \Leftrightarrow h = 0$ ou $h = 8i$.
1^{er} cas : Si $h = 0$ ou $h = 8i$, $\Delta = 0$.
L'équation (F) a une unique solution $z_0 = \frac{h}{2} \in D$.
2^{ème} cas : Si $h \in \mathbb{C} \setminus \{0, 8i\}$, $\Delta \neq 0$.
Comme $(2i)^2 - 2ih + 2ih = -4 \neq 0$, (F) a deux solutions distinctes dans D .
Donc h a une unique antécédent par f si $h = 0$ ou $h = 8i$
et h a deux antécédents par f si $h \in \mathbb{C} \setminus \{0, 8i\}$.

4. D'après la question 3., tout élément h de $\mathbb{C}$ admet au moins un antécédent z par f .
Donc f est surjective de D dans $\mathbb{C}$ et $f(D) = \mathbb{C}$.
5. Comme $1 + i$ a deux antécédents par f (d'après 2.b.), on en déduit que f n'est pas injective.

Exercice 2 : Étude locale de deux fonctions

1. On a : $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}$
 $= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)}$
On pose $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$. On a bien : $\lim_{u \rightarrow 0} u = 0$.
Comme $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o_{u \rightarrow 0}(u^2)$ et $u^2 = \frac{1}{4}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$, on a :
 $f(x) = 1 - (\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2) + \frac{1}{4}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.
Bilan : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$
2. On a donc : $f(x) = f(0) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.
Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
3. Une équation de la tangente T à la courbe C_f de f au point d'abscisse 0 est
 $y = 1 - \frac{1}{2}x$
Au voisinage de 0, on a : $f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{12}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{12}x^2$.
Comme $\frac{1}{12}x^2 \geq 0$ au voisinage de 0, on en déduit que $f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \geq 0$ au voisinage de 0.
Bilan : La courbe de f est au dessus de T au voisinage de 0.
4. a. On pose $X = \frac{1}{x}$. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0^+$.
Or $g\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{e^X - 1} = \frac{f(X)}{X} = \frac{1}{X} - \frac{1}{2} + \frac{X}{12} + o_{X \rightarrow 0}(X)$ (d'après la question 1.)
Donc : $g(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{12x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$

Par unicité du développement asymptotique de g , on obtient

$$a = 1, b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{12}$$

b . Au voisinage de $+\infty$, $g(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \right] = 0$$

Donc C_g admet une asymptote oblique d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ au voisinage de $+\infty$

Remarque 1. Puisque $\frac{1}{12x} > 0$ au voisinage de $+\infty$, on peut également affirmer que C_g est au-dessus de son asymptote.

Exercice 3 : Étude d'une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^2$

1 . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $(x'', y'') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } (x, y) * (x', y') &= (xx' + 3yy', xy' + yx') \\ &= (x'x + 3y'y, x'y + y'x) \\ &= (x', y') * (x, y) \end{aligned}$$

La loi $*$ est donc commutative.

On a :

$$\begin{aligned} ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') &= (xx' + 3yy', xy' + yx') * (x'', y'') \\ &= ((xx' + 3yy')x'' + 3(xy' + yx')y'', (xx' + 3yy')y'' + (xy' + yx')x'') \\ &= (xx'x'' + 3yy'x'' + 3xy'y'' + 3yx'y'', xx'y'' + 3yy'y'' + xy'x'' + yx'x'') \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') &= (x, y) * (x'x'' + 3y'y'', x'y'' + y'x'') \\ &= (x(x'x'' + 3y'y'') + 3y(x'y'' + y'x''), x(x'y'' + y'x'') + y(x'x'' + 3y'y'')) \\ &= (xx'x'' + 3xy'y'' + 3yx'y'', xx'y'' + xy'x'' + yx'x'' + 3yy'y'') \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') = ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'').$$

La loi $*$ est donc associative.

2 . Montrons que $(1, 0)$ est l'élément neutre de $*$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{On a : } (x, y) * (1, 0) = (x \times 1 + 3y \times 0, x \times 0 + y \times 1) = (x, y).$$

Par commutativité de $*$, on a également : $(1, 0) * (x, y) = (x, y) * (1, 0) = (x, y)$.

L'élément $(1, 0)$ est donc l'élément neutre de $*$.

3 . On a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) * (0, 0) = (0, 0) \neq (1, 0)$.

Donc : $(0, 0)$ n'admet pas de symétrie pour la loi $*$.

$(\mathbb{R}^2, *)$ n'est donc pas un groupe.

Exercice 4 : Étude d'une caustique de cercle

1 . Les fonctions x et y sont des sommes et des produits fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Elles sont donc définies sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } x(t + \pi) &= \cos(t + \pi)(1 + 2\sin^2(t + \pi)) \\ &= -\cos(t)(1 + 2(-\sin(t))^2) \\ &= -\cos(t)(1 + 2\sin^2(t)) \\ &= -x(t) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } y(t + \pi) = 2\sin^3(t + \pi) = 2(-1)^3\sin^3(t) = -2\sin^3(t) = -y(t).$$

On peut donc réduire l'étude à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On retrouve le reste de la courbe par la symétrie de centre O .

$$\begin{aligned} \text{On a : } x(-t) &= \cos(-t)(1 + 2\sin^2(-t)) \\ &= \cos(t)(1 + 2(-\sin(t))^2) \\ &= \cos(t)(1 + 2\sin^2(t)) \\ &= x(t) \end{aligned}$$

La fonction $\sin$ est impaire. Donc, la fonction $\sin^3$ également.

$$\text{D'où : } y(-t) = -y(t).$$

On peut réduire l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On retrouve la courbe sur $[0, \pi]$ par la symétrie d'axe (Ox) .

2 . Les fonctions x et y sont des sommes et des produits fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } x'(t) &= -\sin(t)(1 + 2\sin^2(t)) + 4\sin(t)\cos^2(t) \\ &= \sin(t)(-1 - 2\sin^2(t) + 4\cos^2(t)) \\ &= \sin(t)(-1 - 2\sin^2(t) + 4(1 - \sin^2(t))) \\ &= \sin(t)(3 - 6\sin^2(t)) \\ &= -6\sin(t)\left(\sin(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -6\sin(t)\left(\sin(t) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\sin(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{et : } y'(t) = 6\cos(t)\sin^2(t).$$

Or, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont positives et s'annulent uniquement en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ respectivement. De plus, $\sin$ est croissante sur cette intervalle. On en déduit les signes de $x'(t)$ et de $y'(t)$. D'où le tableau de variations suivant :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		
$x'(t)$	0	+	0	-	-3
$x(t)$	1	$\sqrt{2}$	0		
$y'(t)$	0	+	+	+	0
$y(t)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2		

3 . D'après le tableau de variations, les dérivées de x et de y s'annulent simultanément uniquement en $t = 0$. La courbe admet donc un unique point stationnaire en $t = 0$.

On a : $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)$ et : $\sin(t) = t + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$.

Donc : $\sin^2(t) = t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^3)$ et : $\sin^3(t) = t^3 + o_{t \rightarrow 0}(t^3)$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } x(t) &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^3)\right) \left(1 + 2t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^3)\right) \\ &= 1 + 2t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^3) - \frac{t^2}{2} \\ &= 1 + \frac{3t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^3) \end{aligned}$$

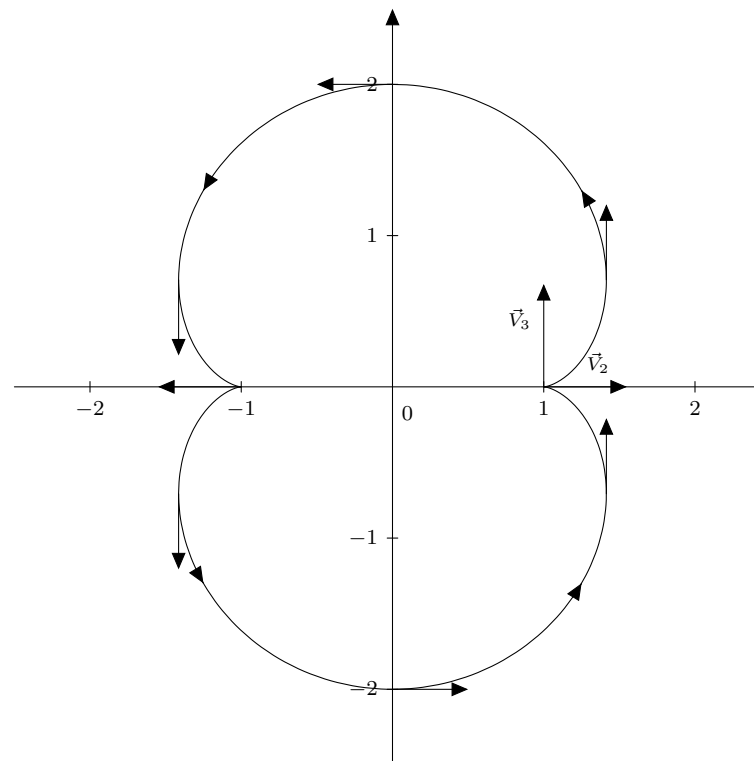
et : $y(t) = 2t^3 + o_{t \rightarrow 0}(t^3)$.

$$\text{Donc : } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{V}_2} + t^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{V}_3} + o_{t \rightarrow 0}(t^3).$$

Les vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ sont non colinéaires. Les entiers caractéristiques de la courbe Γ en 0 sont $p = 2$ et $q = 3$.

La courbe Γ admet donc un point de rebroussement de première espèce en $t = 0$ de vecteur tangent $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4 . On en déduit la courbe suivante :



Exercice 5 : Étude d'une fonction

1 . On a : $f(-x) = -x \operatorname{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = x \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

La fonction f est paire.

2 . a . On a : $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a donc : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \frac{1}{x} = 1$

et $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x \frac{1}{x} = 1$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

b . On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

On pose : $X = \frac{1}{x}$.

On a : $f(x) = \frac{\text{sh}(X)}{X}$.

Or $\text{sh}(X) = \frac{e^X - e^{-X}}{2}$, $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = 0$.

Donc : $e^{-X} = \underset{X \rightarrow +\infty}{o}(e^X)$. D'où : $\text{sh}(X) \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^X}{2}$.

Donc : $\frac{\text{sh}(X)}{X} \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^X}{2X}$.

Par les croissances comparées, on a : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{2X} = +\infty$ et

donc : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}(X)}{X} = +\infty$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Puisque f est paire, on en déduit : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

3 . Les fonctions sh et $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sont dérivables sur, respectivement, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$. Donc, $\left(x \mapsto \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

De plus : $f'(x) = \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$
 $= \left(\frac{\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{1}{x}\right) \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc : $f'(x) = \left(\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$

4 . Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ tel que : $g(X) = \text{th}(X) - X$.

La fonction g est une somme de fonctions dérivables. Elle est donc dérivable.

De plus : $g'(X) = 1 - \text{th}^2(X) - 1 = -\text{th}^2(X)$.

D'où : $\forall X > 0 \quad g'(X) < 0$.

La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Puisque $g(0) = 0$, on en déduit : $\forall X \in \mathbb{R}^{+*} \quad \text{th}(X) - X < 0$ et

donc : $\forall X \in \mathbb{R}^{+*} \quad \text{th}(X) < X$

5 . On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \text{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$,

on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f'(x) < 0$.

Par la parité de f , on obtient également : $\forall x \in \mathbb{R}^{-*} \quad f'(x) > 0$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

6 . On a : $\text{sh}(X) = X + \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} + \underset{X \rightarrow 0}{o}(X^5)$.

Donc : $\frac{\text{sh}(X)}{X} = 1 + \frac{X^2}{6} + \frac{X^4}{120} + \underset{X \rightarrow 0}{o}(X^4)$

7 . On a : $f(x) = \frac{\text{sh}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet pour développement limité :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

ie. $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = 0$ et $a_4 = \frac{1}{120}$.

8 . On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

On en déduit que : $f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^4)$.

Donc : $f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)$.

La fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F en posant $F(0) = 1$.

Par le développement limité précédent, ainsi prolongée, la fonction F est dérivable en 0 (et $F'(0) = 0$).

D'autre part, f et $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi, par composée de fonctions dérivables, F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Étude de suites définies par des sommes

1 . Première méthode :

a . Soit un entier $k \geq 2$.

On a : $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - k(k-1) - (k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{1}{k^2(k-1)} \geq 0$.

Bilan : Pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Soit un entier $n \geq 2$.

En sommant l'inégalité précédente de 2 à n , on a : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$

Or : $\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$ (car c'est une somme télescopique) et

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} = s_n - 1.$$

Ainsi : $s_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}$, d'où $s_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Or $-\frac{1}{n} < 0$, donc $s_n \leq 2$ pour tout entier $n \geq 2$. De plus, $s_1 = 1 \leq 2$.

Bilan : $s_n \leq 2$ pour tout entier $n \geq 1$ ie $(s_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 2.

b . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$.

Donc $(s_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

De plus, $(s_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 2. Donc $(s_n)_{n \geq 1}$ converge vers l et $l \leq 2$

2 . Deuxième méthode :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Donc $(s_n)_{n \geq 1}$ est croissante. (1)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= s_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(s_n + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + (n+1)n - (n+1)^2}{(n+1)^2 n} = -\frac{1}{(n+1)^2 n} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc $(t_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. (2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n - s_n = \frac{1}{n}$. Doù $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n - s_n) = 0$ (3)

D'après (1), (2) et (3), les suites $(s_n)_{n \geq 1}$ et $(t_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Alors $(s_n)_{n \geq 1}$ et $(t_n)_{n \geq 1}$ convergent vers une même limite.

3 . a . Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. D'où $u_n = \frac{1}{4} s_n$

Comme $(s_n)_{n \geq 1}$ converge vers S , on en déduit que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{1}{4} S$.

b . Pour tout $n \geq 1$, $u_n + v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$.

La 1^{ère} somme correspond aux indices $p = 2k$ pairs et la 2^{ème} somme correspond aux indices $p = 2k+1$ impairs (p variant de 1 à $2n+1$) d'une somme de terme général $\frac{1}{p^2}$.

Pour tout $n \geq 1$, $u_n + v_n = \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p^2}$. De plus, $\sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p^2} = s_{2n+1}$.

D'où pour tout $n \geq 1$, $v_n = s_{2n+1} - u_n$.

Comme $(s_{2n+1})_{n \geq 0}$, suite extraite de $(s_n)_{n \geq 1}$, converge vers S et comme $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{1}{4} S$, on en déduit que

$(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers $S - \frac{1}{4} S = \frac{3}{4} S$

c . Pour tout $n \geq 1$, $w_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

En décomposant w_n en une somme d'indices pairs ($k = 2p$) et en une somme d'indices impairs ($k = 2p+1$), on obtient : $w_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{2p}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^2}$

Or : $(-1)^{2p} = 1$ et $(-1)^{2p+1} = -1$, d'où $w_n = u_n - v_n$.

Comme $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{1}{4} S$ et comme $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{3}{4} S$, on

en déduit que $(w_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{1}{4} S - \frac{3}{4} S = -\frac{1}{2} S$.