Lycée Gustave Eiffel | Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 | Devoir Surveillé n°6
14 mars 2012 | Durée 3h

Problème 1 : Étude des dérivées successives d'une fonction (Concours commun 2004 des écoles des mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes (toutes filières))

1. On a : $a(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2} = \dfrac{1+(1-x)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Pour tout $x \in I$, on a : $1 - x > 0$. Une primitive sur I de $\dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{(1-x)'}{1-x}$ est donc $\ln(1-x)$.

Une primitive de $\dfrac{1}{(1-x)^2} = -\dfrac{(1-x)'}{(1-x)^2}$ est $\dfrac{1}{1-x}$.

$$\boxed{\text{Une primitive de } a(x) \text{ sur } I \text{ est donc : } A(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}.}$$

2. Sur I, on a : $(E) \iff y' - a(x)y = 0$.
Une primitive de a sur I est A.
Par conséquent la solution générale de (E) sur I est : $\lambda \mathrm{e}^{A(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Or : $\mathrm{e}^{A(x)} = \mathrm{e}^{-\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}} = \dfrac{1}{1-x}\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$.

$$\boxed{\text{La solution générale de } (E) \text{ est donc : } \frac{\lambda}{1-x}\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

3. On a : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)$.

$$\text{Donc : } \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) = \exp\left(1 + x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)\right)$$
$$= \mathrm{e}.\exp\left(x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)\right)$$

On pose $u = x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)$.
On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} u = 0$.

$$\text{Or : } \mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}\left(u^3\right),$$
$$u^2 = x^2 + 2x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)$$
$$\text{et : } u^3 = x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)$$

$$\begin{aligned}\text{Donc : } \exp\left(x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)\right) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)\\ &\quad + \frac{x^2}{2} + x^3\\ &\quad + \frac{x^3}{6}\\ &= 1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{13}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où : } f(x) &= \mathrm{e}.(1 + x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right))(1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{13}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right))\\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}x + \frac{3\mathrm{e}x^2}{2} + \frac{13\mathrm{e}}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right))\\ &\quad + \mathrm{e}x + \mathrm{e}x^2 + \frac{3\mathrm{e}x^3}{2}\\ &\quad + \mathrm{e}x^2 + \mathrm{e}x^3\\ &\quad + \mathrm{e}x^3\end{aligned}$$

On obtient donc : $\boxed{f(x) = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}x + \frac{7\mathrm{e}}{2}x^2 + \frac{17\mathrm{e}}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)}$

4. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$$

On note $\mathcal{H}_n$ cette propriété.
Remarquons que la fonction f est une composée de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout entier n, la dérivée $n^{\text{ème}}$ est bien définie.

Initialisation : On a $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{1-x}\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$. On pose : $P_0(X) = X$.

On a alors : $f^{(0)}(x) = P_0\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$.

La propriété $\mathcal{H}_0$ est donc vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose $\mathcal{H}_n$.
Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.

On a : $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$.

Donc : $f^{(n+1)}(x) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2 P_n'\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}} + \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2 P_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

On pose : $P_{n+1}(X) = X^2P_n' + X^2P_n$.

On a alors : $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}$.

On a donc démontré $\mathcal{H}_{n+1}$.

On en déduit que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in I \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x}}.$$
De plus : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(X) = X^2P_n' + X^2P_n$.

5. La démonstration précédente nous donne : $\boxed{P_0(X) = X}$

On a : $P_1(X) = X^2P_0' + X^2P_0 = X^2 + X^2.X$.

Donc : $\boxed{P_1(X) = X^3 + X^2}$

On a : $P_2(X) = X^2P_1' + X^2P_1 = X^2.(3X^2+2X) + X^2.(X^3+X^2)$.

Donc : $\boxed{P_1(X) = X^5 + 4X^4 + 2X^3}$

On a : $P_3(X) = X^2P_2' + X^2P_2 = X^2.(5X^4+16X^3+6X^2) + X^2.(X^5+4X^4+2X^3)$.

Donc : $\boxed{P_3(X) = X^7 + 9X^6 + 18X^5 + 6X^4}$

6. La fonction f est solution de l'équation (E).

On a donc : $(1-x)^2f'(x) = (2-x)f(x)$.

Soient g et h les fonctions telles que : $g(x) = (1-x)^2$ et $h(x) = 2-x$.

Les fonctions g et h sont polynomiales, elles sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Grâce à la formule de Leibnitz, on a :

$$(g.f')^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}(x)(f')^{(n-k)}(x).$$

Or : $g'(x) = 2(x-1)$, $g''(x) = 2$ et $\forall k > 2 \quad g^{(k)}(x) = 0$.

Donc : $(g.f')^{(n)}(x) = (1-x)^2f^{(n+1)}(x) + 2n(x-1)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x)$.

Toujours grâce à la formule de Leibnitz, on a :

$$(h.f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x).$$

Or : $h'(x) = -1$ et $\forall k > 1 \quad h^{(k)} = 0$.

Donc : $(h.f)^{(n)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$.

D'où :

$(1-x)^2f^{(n+1)}(x) + 2n(x-1)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$.

On en déduit : $(1-x)^2f^{(n+1)}(x) = (2n+2-(2n+1)x)f^{(n)}(x) - n^2f^{(n-1)}(x)$

D'où :

$$(1-x)^2P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \big(1+(2n+1)(1-x)\big)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) - n^2P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

En posant $X = \dfrac{1}{1-x}$, on obtient :

$$\frac{1}{X^2}P_{n+1}(X) = \left(1+(2n+1)\frac{1}{X}\right)P_n(X) - n^2P_{n-1}(X)$$

On en déduit : $\boxed{\forall n > 0 \quad P_{n+1}(X) = \left[(2n+1)X + X^2\right]P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X)}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $a_n = f^{(n)}(0) = P_n(1)e$.

Par la question précédente, on obtient :
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P_{n+1}(1)\mathrm{e} \\ &= \left[(2n+2)P_n(1) - n^2P_{n-1}(1)\right]\mathrm{e} \\ &= (2n+2)(P_n(1)\mathrm{e}) - n^2(P_{n-1}(1)\mathrm{e}) \end{aligned}$$

On en déduit : $\boxed{a_{n+1} = (2n+2)a_n - n^2a_{n-1}}$

8. a. Par la question 3, on a : $f(x) = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}x + \dfrac{7\mathrm{e}}{2}x^2 + \dfrac{17\mathrm{e}}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut lui appliquer le théorème de Taylor-Young à l'ordre 3 : $f(x) = a_0 + a_1x + \dfrac{a_2}{2}x^2 + \dfrac{a_3}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)$.

Par l'unicité du développement limité, on en déduit :

$$\boxed{a_0 = \mathrm{e},\ a_1 = 2\mathrm{e},\ a_2 = 7\mathrm{e},\ a_3 = 34\mathrm{e}}$$

Par la question précédent avec $n = 3$, on a : $a_4 = 8a_3 - 9a_2 = 8.34\mathrm{e} - 9.7\mathrm{e}$.

D'où : $\boxed{a_4 = 209\mathrm{e}}$.

b. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut lui appliquer le théorème de Taylor-Young à l'ordre 4 : $f(x) = a_0 + a_1x + \dfrac{a_2}{2}x^2 + \dfrac{a_3}{6}x^3 + \dfrac{a_4}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)$.

On en déduit que : $\boxed{f(x) = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}x + \dfrac{7\mathrm{e}}{2}x^2 + \dfrac{17\mathrm{e}}{3}x^3 + \dfrac{209\mathrm{e}}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)}$.

9. a. On a : $S_p(0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p}\frac{(0+i)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!}$.

Donc : $\boxed{S_p(0) = u_p}$.

On a :
$$\begin{aligned} S_p(1) &= \sum_{i=0}^{p}\frac{(1+i)!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p}\frac{1+i}{i!} = \sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^{p}\frac{i}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!} + \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{(i-1)!} = \sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{i!} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{S_p(1) = u_p + u_{p-1}}$.

b. La suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers e. D'après les relations précédentes, on en déduit : $\boxed{\lim_{p\longrightarrow+\infty} S_p(0) = \mathrm{e}}$ et $\boxed{\lim_{p\longrightarrow+\infty} S_p(1) = 2\mathrm{e}}$

10. On a :

$$\begin{aligned}
&S_p(n+1)-(2n+2)S_p(n)+n^2S_p(n-1)\\
&= \sum_{i=0}^{p}\frac{(n+1+i)!}{(i!)^2}-(2n+2)\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}+n^2\sum_{i=0}^{p}\frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\\
&= \sum_{i=0}^{p}\left((n+1+i)(n+i)-(2n+2)(n+i)+n^2\right)\frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\\
&= \sum_{i=0}^{p}(i^2-i-n)\frac{(n-1+i)!}{(i!)^2}\\
&= -n!+\sum_{i=1}^{p}\frac{(n-1+i)!}{((i-1)!)^2}-\frac{(n+i)!}{(i!)^2}
\end{aligned}$$

On reconnait une somme téléscopique.
On obtient donc :

$S_p(n+1)-(2n+2)S_p(n)+n^2S_p(n-1) = -n!+n!-\dfrac{(n+p)!}{(p!)^2} = -\dfrac{(n+p)!}{(p!)^2}$.

Or : $S_{p-1}(n)-S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}-\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2} = -\frac{(n+p)!}{(p!)^2}$.

On en déduit : $\boxed{S_p(n+1)-(2n+2)S_p(n)+n^2S_p(n-1) = S_{p-1}(n)-S_p(n)}$

11. Montrons par une récurrence double, sur $n\in\mathbb{N}$, que la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge $(\mathcal{H}_n)$.

Initialisation : D'après la question 9b, les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent.
On a donc : $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$.
On suppose $\mathcal{H}_{n-1}$ et $\mathcal{H}_n$.
Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.
D'après la question précédente, on a :

$$S_p(n+1) = S_{p-1}(n)+(2n+1)S_p(n)-n^2S_p(n-1)$$

Puisque les suites $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(n-1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers b_n et b_{n-1}.
On en déduit que $(S_p(n+1))_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $(2n+2)b_n-n^2b_{n-1}$. On a bien démontré $\mathcal{H}_{n+1}$.

> On en déduit que la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $n\in\mathbb{N}$.
> De plus, on a obtenu : $b_{n+1} = (2n+2)b_n-n^2b_{n-1}$

12. Montrons que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

On a : $\begin{cases} a_0 = \mathrm{e}\\ a_1 = 2\mathrm{e}\\ \forall n\in\mathbb{N}^* \quad a_{n+1} = (2n+2)a_n-n^2a_{n-1}\end{cases}$

D'après les questions 9b et 11, on a vu : $\begin{cases} b_0 = e\\ b_1 = 2e\\ \forall n\in\mathbb{N}^* \quad b_{n+1} = (2n+2)b_n-n^2b_{n-1}\end{cases}$

Ces relations caractérisent les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = b_n$.
Or : $b_n = \displaystyle\lim_{p\longrightarrow+\infty} S_p(n)$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{p\longrightarrow+\infty}\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2}\\
&= \lim_{p\longrightarrow+\infty} n!\sum_{i=0}^{p}\frac{n!(n+i)!}{(i!)^2}\\
&= \lim_{p\longrightarrow+\infty} n!\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{n}.\frac{1}{i!}
\end{aligned}$$

On en déduit : $\boxed{a_n = \displaystyle\lim_{p\to+\infty}\sum_{i=0}^{p}\frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim_{p\to+\infty} n!\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{n}.\frac{1}{i!}}$

Exercice 1 : Étude d'une suite
(adapté de BCE - EM Lyon - option économique (2005))

---

1. La fonction $(x\mapsto x^2)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $(x\mapsto x+1)$ est croissante et positive sur $\mathbb{R}^+$. Donc, par composition, $(x\mapsto (x+1)^2+4)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En composant par $(x\mapsto\sqrt{x})$ qui est croissante, on en déduit que la fonction f qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ est croissante.
De plus, par composition de fonctions continues, la fonction f est continue.
D'où : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow0} f(x) = f(0) = \sqrt{5}-2$.
On a : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}(x+1)^2+4$ et $\displaystyle\lim_{y\longrightarrow+\infty}\sqrt{y}-2 = +\infty$. Par composition de limites, on en déduit que : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$.
On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\sqrt{5}-2$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

2. On a : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}+1\right)^2+4}-2 = \sqrt{\dfrac{25}{4}}-2 = \dfrac{5}{2}-2 = \dfrac{1}{2}$.

Par la croissance de f, on a : $\forall x\geq\dfrac{1}{2}\quad f(x)\geq\dfrac{1}{2}$.

L'intervalle $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ est donc f-stable.

Or : $u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc bien définie à valeurs dans } \left[\frac{1}{2},+\infty\right[. \\ i.e.\ \forall n\in\mathbb{N} \quad u_n \geq \frac{1}{2}\end{array}}$$

3. La fonction f est croissante. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
On a : $u_1 = f(u_0) = f(1) = \sqrt{(1+1)^2+4} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$.
Or : $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.
Donc : $u_1 < 2.\frac{3}{2} - 2 = 1 = u_0$.

$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.
On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
La fonction f est continue. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un point fixe de f.
Or :
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{(x+1)^2+4} - 2 = x \\ &\iff (x+1)^2 + 4 = (x+2)^2 \text{ et } x+2 \geq 0 \\ &\iff x^2 + 2x + 5 = x^2 + 4x + 4 \quad (x \in \mathbb{R}^+) \\ &\iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$
$\frac{1}{2}$ est donc l'unique point fixe de f.

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell = \frac{1}{2}.}$

5. La fonction $(x \longmapsto (x+1)^2+4)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi, par composition de fonctions deux fois dérivables, la fonction f est deux fois dérivable.
De plus : $f'(x) = \dfrac{2(x+1)}{2\sqrt{(x+1)^2+4}} = \dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$.

$$\begin{aligned}\text{et } f''(x) &= \frac{1.((x+1)^2+4) - \frac{1}{2}.(x+1).2(x+1)}{((x+1)^2+4)\sqrt{(x+1)^2+4}} \\ &= \frac{4}{((x+1)^2+4)\sqrt{(x+1)^2+4}} > 0\end{aligned}$$

La fonction f' est donc croissante.
D'où : $\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right] \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} \leq f'(x) \leq f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où : $\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right] \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc : $\boxed{\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right] \quad |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}}$

6. Montrons, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

Initialisation : On a : $|u_0 - \ell| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0$.
La propriété est donc vraie au rang 0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que : $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.
On a : $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)|$.
Or, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $\frac{1}{2}$.
De plus, $u_0 = 1$.
D'où $u_n \in \left[\frac{1}{2},1\right]$.
Or : $\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right] \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que :
$$\begin{aligned}|u_{n+1} - \ell| &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}|u_n - \ell| \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$
La propriété est donc héréditaire.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On en déduit que :} \\ \qquad \forall n\in\mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\end{array}}$$

Exercice 2 : Étude d'un polynôme

1. On a : $P = X^6 - 5X^4 + 8X^3 - 9X^2 + aX + b$, d'où : $P' = 6X^5 - 20X^3 + 24X^2 - 18X + a$.
1 est une racine de P d'ordre au moins 2
$\Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 + a + b = 0 \\ -8 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 8 \end{cases}$

$\boxed{\text{Ainsi, 1 est un racine d'ordre au moins 2 si, et seulement si } a = 8 \text{ et } b = -3.}$
On a : $P'' = 30X^4 - 60X^2 + 48X - 18$ d'où : $P''(1) = 30 - 60 + 48 - 18 = 0$
et $P^{(3)} = 120X^3 - 120X + 48$ d'où : $P^{(3)}(1) = 120 - 120 + 48 = 48 \neq 0$
$\boxed{\text{1 est une racine de } P \text{ d'ordre 3}}$

2. En effectuant la division euclidienne de P par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$, on trouve que le reste vaut $R = 0$ et le quotient vaut $\boxed{Q = X^3 + 3X^2 + X + 3}$
On observe que $Q(1) = 8 \neq 0$ et on retrouve le fait que 1 est une racine de P d'ordre 3.

3. On a : $Q = X^3 + 3X^2 + X + 3 = X(X^2+1) + 3(X^2+1)$

$$= (X^2+1)(X+3)$$

La factorisation de Q dans $\mathbb{R}[X]$ est $\boxed{Q = (X^2+1)(X+3)}$

La factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ est $\boxed{Q = (X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+3)}$

4. La factorisation de P en un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est $\boxed{P = (X-1)^3(X^2+1)(X+3)}$.
La factorisation de P en un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est $\boxed{P = (X-1)^3(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})(X+3)}$.

5. D'après la question 4, on a : $P(X^2) = (X^2-1)^3(X^4+1)(X^2+3)$

On pose $T(X) = X^4 + 1$.
Soit $z \in \mathbb{C}$

z est une racine de $T \Leftrightarrow z^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,3]\!]$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{4}}$

La factorisation de T dans $\mathbb{C}[X]$ est :$T = (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}})(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}})(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}})$
La factorisation de $P(X^2)$ en un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est

$$\boxed{\begin{aligned} P(X^2) = (X-1)^3(X+1)^3&(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}) \\ &(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}})(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}})(X + \mathrm{i}\sqrt{3})(X - \mathrm{i}\sqrt{3}) \end{aligned}}$$

D'autre part : $T = (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}})$

$$= (X - 2\cos\frac{\pi}{4}X + 1)(X - 2\cos\frac{3\pi}{4}X + 1)$$

La factorisation de T dans $\mathbb{R}[X]$ est : $T = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$
<u>Autre idée pour factoriser T dans $\mathbb{R}[X]$</u> : $T = (X^2+1)^2 - 2X^2$

$$= (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)$$

On vérifie aisément que ces polynômes ont un discriminant strictement positif et sont donc irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
La factorisation de $P(X^2)$ en un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est
$\boxed{P(X^2) = (X-1)^3(X+1)^3(X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1)(X^2 + 3)}$.