

Problème 1 : Dérivée $n^{\text{ème}}$ et polynômes.

1. (a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f(x) = \frac{e^x}{1-x}$. La fonction f est donc une fraction de fonction $\mathcal{C}^\infty$.

On en déduit que f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

- (b) On raisonne par récurrence.

Initialisation :

On pose : $P_0 = 1$.

On a alors : $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{P_0(x)e^x}{1-x}$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose qu'il existe P_n un polynôme à coefficients réels tel que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } f^{(n+1)}(x) &= \frac{e^x P_n(x) + e^x P'_n(x)}{(1-x)^{n+1}} + (n+1) \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+2}} \\ &= \frac{((1-x)(P_n(x) + P'_n(x)) + (n+1)P_n(x))e^x}{(1-x)^{n+2}} \\ &= \frac{((n+2-x)P_n(x) + (1-x)P'_n(x))e^x}{(1-x)^{n+2}} \end{aligned}$$

On en déduit que $P_{n+1}(x) = (1-x)P'_n(x) + (n+2-x)P_n(x)$ convient.

Par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

On a également démontré que :

$$P_{n+1}(x) = (1-x)P'_n(x) + (n+2-x)P_n(x).$$

- (c) Précédemment, on a obtenu : $P_0 = 1$

On a : $P_1 = (1-X)P'_0 + (2-X)P_0$. Donc : $P_1 = 2-X$

On a : $P_2 = (1-X)P'_1 + (3-X)P_1 = (1-X).(-1) + (3-X)(2-X)$.

$$\text{Donc : } P_2 = X^2 - 4X + 5$$

- (d) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme de plus haut degré de P_n est : $(-1)^n X^n$.

Initialisation :

D'après ce qui précède, la propriété est vraie aux rangs 0, 1 et 2.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que le terme de plus haut degré de P_n est $(-1)^n X^n$.

On a : $P_{n+1} = (1-X)P'_n + (n+2-X)P_n$.

Or : $\deg((1-X)P'_n) = \deg(1-X) + \deg(P'_n) = 1 + \deg(P_n) - 1 = n$.

Et : $\deg((n+2-X)P_n) = \deg((n+2-X)) + \deg(P_n) = n+1$

Donc : $\deg((n+2-X)P_n) > \deg((1-X)P'_n)$.

Le terme de plus haut degré de P_{n+1} est donc celui de $(n+2-X)P_n$.

Or, le terme de plus haut degré de $(n+2-X)$ est $-X$ et celui de P_n est $(-1)^n X^n$.

Le terme de plus haut degré de P_{n+1} est donc : $(-1)^{n+1} X^{n+1}$.

Par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme de plus haut degré de P_n est : $(-1)^n X^n$.

- (e) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(1) = n!$.

Initialisation :

On a : $P_0(1) = 1$.

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $P_n(1) = n!$.

On a : $P_{n+1}(1) = (1-1)P'_n(1) + (n+2-1)P_n(1) = (n+1).n! = (n+1)!$.

La propriété est donc héréditaire.

Par récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(1) = n!$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } (x-1)f'(x) - (x-2)f(x) &= (x-1) \frac{P_1(x)e^x}{(1-x)^2} - (x-2) \frac{e^x}{1-x} \\ &= \frac{(-(2-x) - (x-2))e^x}{1-x} = 0 \end{aligned}$$

On a bien : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad (x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On remarque que les dérivées de $(x \mapsto (x-1))$ et de $(x \mapsto (x-2))$ sont constantes égales à 1. De plus, leurs dérivées d'ordres supérieurs sont nulles.

On dérive l'expression précédente à l'ordre n . En utilisant la formule de Leibnitz, on obtient :

$$(x-1)f^{(n+1)}(x) + nf^{(n)}(x) - ((x-2)f^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)) = 0.$$

On obtient ainsi : $(1-x)f^{(n+1)}(x) = (n+2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$.

$$\text{Or : } (1-x)f^{(n+1)}(x) = (1-x)\frac{P_{n+1}(x)e^x}{(1-x)^{n+2}} = \frac{e^x}{(1-x)^{n+1}}P_{n+1}(x),$$

$$(n+2-x)f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{(1-x)^{n+1}}((n+2-x)P_n(x))$$

$$\text{et : } -nf^{(n-1)}(x) = -n\frac{P_{n-1}(x)e^x}{(1-x)^n} = \frac{e^x}{(1-x)^{n+1}}n(1-x)P_{n-1}(x)$$

Puisque $\frac{e^x}{(1-x)^{n+1}} \neq 0$, on obtient : $P_{n+1}(x) = (n+2-x)P_n(x) + n(x-1)P_{n-1}(x)$ pour tout réel $x \neq 1$ et donc pour tout x réel.

Par conséquent, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P_{n+1}(x) = (n+2-x)P_n(x) + n(x-1)P_{n-1}(x)}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a : } P_{n+1} = (n+2-X)P_n + n(X-1)P_{n-1}$$

$$\text{et : } P_{n+1} = (n+2-X)P_n + (1-X)P'_n.$$

$$\text{Donc : } (1-X)P'_n = n(X-1)P_{n-1}.$$

$$\text{On en déduit que : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P'_n = -nP_{n-1}}$$

3. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, le polynôme P_n n'admet que des racines simples.

Initialisation :

On a : $P_1 = 2-X$. Donc, 2 est l'unique racine de P_1 . Elle est simple. La propriété est donc vraie au rang 1.

Hérédité :

Soit $n \geq 1$. On suppose que le polynôme P_n n'admet que des racines simples.

On suppose, par l'absurde, que P_{n+1} admet une racine double.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine double de P_{n+1} .

D'après la question 1e, on a : $P_{n+1}(1) = (n+1)! \neq 0$. Donc, $\alpha \neq 1$.

D'autre part, $P'_{n+1}(\alpha) = 0$.

$$\text{Or : } P'_{n+1} = -(n+1)P_n. \text{ Donc : } P_n(\alpha) = 0.$$

$$\text{Par la question 1b, on a également : } P_{n+1}(\alpha) = (1-\alpha)P'_n(\alpha) + (n+2-\alpha)P_n(\alpha).$$

$$\text{D'où : } 0 = P_{n+1}(\alpha) = (1-\alpha)P'_n(\alpha).$$

$$\text{Or : } 1-\alpha \neq 0. \text{ D'où : } P_n(\alpha) = P'_n(\alpha) = 0.$$

Par l'hypothèse de récurrence, on aboutit à une contradiction.

On en déduit que P_{n+1} n'a que des racines simples.

On en déduit, que pour tout $n \geq 1$, le polynôme P_n n'admet que des racines simples.

4. (a) Soit $(j, k) \in \mathbb{N}^2$.

$$\text{On a : } (X^k)^{(j)} = \begin{cases} \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(b) \text{ On a : } P^{(j)} = \sum_{k=0}^n a_k (X^k)^{(j)}.$$

On suppose d'abord $j \leq n$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } P^{(j)} &= \sum_{k=0}^{j-1} a_k (X^k)^{(j)} + \sum_{k=j}^n a_k (X^k)^{(j)} \\ &= 0 + \sum_{k=j}^n a_k (X^k)^{(j)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } P^{(j)} = \sum_{k=j}^n \frac{k!}{(k-j)!} a_k X^{k-j}.$$

On suppose $j > n$.

Alors, pour tout $0 \leq k \leq n < j$, $(X^k)^{(j)} = 0$. On en déduit que : $P^{(j)} = 0$.

$$\text{Donc : } P^{(j)} = \begin{cases} \sum_{k=j}^n \frac{k!}{(k-j)!} a_k X^{k-j} & \text{si } j \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) On suppose d'abord $j \leq n$.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } P^{(j)}(0) &= \sum_{k=j}^n \frac{k!}{(k-j)!} a_k 0^{k-j} \\ &= \frac{j!}{(j-j)!} a_j 0^{j-j} + \sum_{k=j+1}^n \frac{k!}{(k-j)!} a_k 0^{k-j} \end{aligned}$$

Si $k > j$, alors $k-j \geq 1$ et donc : $0^{k-j} = 0$.

$$\text{On en déduit : } P^{(j)}(0) = j!a_j.$$

On suppose $j > n$.

$$\text{On a : } P^{(j)} = 0 \text{ et donc : } P^{(j)}(0) = 0.$$

$$\text{On en déduit que : } P^{(j)}(0) = \begin{cases} j!a_j & \text{si } j \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que si } 0 \leq k \leq n, \text{ alors : } a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

$$\text{Or : } P = \sum_{k=1}^n a_k X^k.$$

$$\text{D'où : } \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

(d) On applique la question précédent à Q , on obtient : $Q = \sum_{k=0}^n \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

$$\text{Or : } Q = P(X+1).$$

$$\text{Donc : } \forall k \in \mathbb{N} \quad Q^{(k)} = P^{(k)}(X+1).$$

$$\text{D'où : } Q = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(1)}{k!} X^k.$$

$$\text{Or : } Q = P(X+1). \text{ Donc : } P = Q(X-1).$$

$$\text{On en déduit : } P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k$$

5. Montrons que $P_n^{(k)} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} P_{n-k}$.

Initialisation :

$$\text{On a : } P_n^{(0)} = P_n = (-1)^0 \frac{n!}{(n-0)!} P_{n-0}.$$

La propriété est vraie pour $k=0$.

Hérédité :

Soit $0 \leq k < n$.

$$\text{On suppose } P_n^{(k)} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} P_{n-k}.$$

$$\text{On a alors : } P_n^{(k+1)} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} P_{n-k}'.$$

$$\text{Or : } n-k \geq 1. \text{ Donc, d'après la question 2c : } P_{n-k}' = -(n-k)P_{n-k-1}.$$

$$\text{D'où : } P_n^{(k+1)} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (-(n-k)P_{n-k-1}) = (-1)^{k+1} \frac{n!}{(n-(k+1))!} P_{n-(k+1)}.$$

La propriété est donc héréditaire.

$$\text{Par récurrence finie, on en déduit : } \forall 0 \leq k \leq n \quad P_n^{(k)} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} P_{n-k}$$

Soit $0 \leq k \leq n$.

$$\text{Or : } P_{n-k}(1) = (n-k)!.$$

$$\text{D'où : } P_n^{(k)}(1) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} (n-k)!.$$

$$\text{et donc : } \forall 0 \leq k \leq n \quad P_n^{(k)}(1) = (-1)^k n!$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a : } \deg(P_n) = n.$$

$$\begin{aligned} \text{D'après la question 4d, on a : } P_n &= \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k!} (X-1)^k \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit : } P_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(1-X)^k}{k!}$$

$$\text{On a : } f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{e^x}{(1-x)^{n+1}} n! \sum_{k=0}^n \frac{(1-x)^k}{k!}.$$

$$\text{On en déduit : } f^{(n)}(x) = n! e^x \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! (1-x)^{n+1-k}}$$

Exercice 1 : Une équation différentielle.

1. La fonction y est solution de (E) sur $\mathbb{R}^+$.

$$\text{On a donc : } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x^2 y'(x) + y(x) = x^2.$$

$$\text{En particulier, on a : } 0^2 y'(0) + y(0) = 0^2.$$

$$\text{Donc : } y(0) = 0.$$

$$\text{Or : } u_0 = y(0).$$

$$\text{On en déduit : } \boxed{u_0 = 0}$$

2. Les termes de l'équation (E) sont des sommes et des produits de fonctions C^∞ .

Nous pouvons donc dériver autant de fois que nécessaire les termes de l'équation.

$$\text{En dérivant } (E), \text{ on obtient : } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (2xy'(x) + x^2 y''(x)) + y'(x) = 2x$$

$$\text{et donc : } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x^2 y''(x) + (1+2x)y'(x) = 2x \quad (E').$$

$$\text{En particulier, pour } x=0, \text{ on a : } y'(0) = 0.$$

$$\text{D'où : } \boxed{u_1 = 0}$$

$$\text{En dérivant } (E'), \text{ on obtient : } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (2xy''(x) + x^2 y'''(x)) + (2y'(x) + (1+2x)y''(x)) = 2$$

$$\text{et donc : } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x^2 y'''(x) + (1+4x)y''(x) + 2y'(x) = 2 \quad (E'').$$

$$\text{En particulier, pour } x=0, \text{ on a : } y''(0) = 2.$$

$$\text{On en déduit : } \boxed{u_2 = 2}$$

3. La fonction y est C^∞ . On applique le théorème de Taylor-Young à la fonction y en 0

$$\text{à l'ordre 2, on obtient : } y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + o_0(x^2) = x^2 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x^2).$$

$$\text{Donc, si } y \text{ est de la forme } x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \text{ alors on a : } \alpha = \beta = 0 \text{ et } \gamma = 1.$$

$$\text{Soit } g \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R}^+ \text{ par : } g(x) = x^2 \text{ et } x \in \mathbb{R}^+.$$

$$\text{La fonction } g \text{ est dérivable et } g'(x) = 2x.$$

$$\text{On a alors : } x^2 g'(x) + g(x) = 2x^3 + x^2 \neq x^2 \text{ si } x \neq 0.$$

La fonction g n'est donc pas une solution de l'équation (E) .

La fonction y n'est donc pas de la forme $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

4. (a) Soit $n \geq 3$.

Soient g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = x^2$ et $h = g.y'$.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{cases} g(x) = x^2 \\ g'(x) = 2x \\ g''(x) = 2 \\ \text{et } \forall k \geq 3 \quad g^{(k)}(x) = 0 \end{cases}$$

En dérivant n fois l'équation (E) , on obtient : $h^{(n)}(x) + y^{(n)}x = 0$.

D'autre part, par la formule de Leibnitz, on a :

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) (y')^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} g^{(k)}(x) (y')^{(n-k)}(x) + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \underbrace{g^{(k)}(x)}_{=0} (y')^{(n-k)}(x) \\ &= g^{(0)}(x) y^{(n+1)}(x) + n g^{(1)}(x) y^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} g^{(2)}(x) y^{(n-1)}(x) \\ &= x^2 y^{(n+1)}(x) + 2n x y^{(n)}(x) + n(n-1) y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x^2 y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx) y^{(n)}(x) + n(n-1) y^{(n-1)}(x) = 0$.

Pour $x = 0$, on obtient alors : $y^{(n)}(0) + n(n-1) y^{(n-1)}(0) = 0$.

On en déduit : $u_n + n(n-1) u_{n-1} = 0$

(b) On calcule les premiers termes.

On a : $u_2 = 2 = 2!1!$,

$$u_3 = -(3 \times 2) u_2 = -(3 \times 2) \times 2 = -3!2!,$$

$$u_4 = -(4 \times 3) u_3 = (4 \times 3 \times 2) \times (3 \times 2) = 4!3!$$

$$\text{et : } u_5 = -(5 \times 4) \times u_4 = -(5 \times 4 \times 3 \times 2) \times (4 \times 3 \times 2) = -5!4!.$$

Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 2 \quad u_n = (-1)^n n! (n-1)!$

Initialisation :

Par les calculs précédents, la propriété est vraie au rang $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$.

Hérédité :

On suppose $n \geq 3$.

On suppose que : $u_n = (-1)^n n! (n-1)!$

Par la question 4a, on a : $u_{n+1} = -(n+1) n u_n = -((n+1)n) ((-1)^n (n-1)! n!)$
 $= (-1)^{n+1} n! (n+1)!$

On reconnaît la formule au rang $n+1$.

Par récurrence, on en déduit : $\forall n \geq 2 \quad u_n = (-1)^n n! (n-1)!$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction y est C^∞ . On peut donc lui appliquer le théorème de Taylor-Young à l'ordre n en 0.

$$\begin{aligned} \text{On obtient alors : } y(x) &= \sum_{k=2}^n \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k k! (k-1)!}{k!} x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \end{aligned}$$

et donc : $y(x) = \sum_{k=2}^n (-1)^k (k-1)! x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$

Problème 2 : Équation du second degré dans $\mathcal{L}(E)$

Première partie : Étude d'un exemple

1. a. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff x = 2y - 3z$

$$\iff \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha - 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

et $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E_1

b. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Cherchons $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$.

Il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $u_1 = \alpha(2, 1, 0) + \beta(-3, 0, 1)$ et $u_2 = \gamma(2, 2, 1)$

$$\begin{aligned}
\text{On a : } u = u_1 + u_2 &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x = 2\alpha - 3\beta + 2\gamma \\ y = \alpha + 2\gamma \\ z = \beta + \gamma \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 2\alpha - 3\beta + 2\gamma \\ \alpha = y - 2\gamma \\ \beta = z - \gamma \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \gamma = x - 2y + 3z \\ \alpha = -2x + 5y - 6z \\ \beta = -x + 2y - 2z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} u_1 = (-2x + 5y - 6z) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \quad + (-x + 2y - 2z) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_2 = (x - 2y + 3z) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}
\end{aligned}$$

Tout élément $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ se décompose de façon unique en $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$

Donc E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$.

2. Supposons qu'il existe deux applications f et g telles que si $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$, on ait $f(u_1 + u_2) = u_1 - 2u_2$ et $g(u_1 + u_2) = u_1 - 2u_2$. Soit $u \in E$. Comme $E_1 \oplus E_2 = E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.

$$D'où \quad f(u) = f(u_1 + u_2) = u_1 - 2u_2 = g(u_1 + u_2) = g(u).$$

Donc $f = g$. D'où l'unicité de f

Soient $(u, v) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Comme $E_1 \oplus E_2 = E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $u = u_1 + u_2$ et un unique couple $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $v = v_1 + v_2$.

$$\begin{aligned}
\text{On a alors : } f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda(u_1 + u_2) + \mu(v_1 + v_2)) = f((\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2)) \\
&= (\lambda u_1 + \mu v_1) - 2(\lambda u_2 + \mu v_2) = \lambda(u_1 - 2u_2) + \mu(v_1 - 2v_2) \\
&= \lambda f(u) + \mu f(v) \quad (1)
\end{aligned}$$

De plus, $\forall u \in E$, $f(u) = f(u_1 + u_2) = u_1 - 2u_2 \in E$ (2)

D'après (1) et (2), f est une application linéaire de E dans lui-même.

3. Soit $u \in E$. Comme $E_1 \oplus E_2 = E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.

$$\text{Ainsi : } u \in \ker(f - I) \iff f(u) = u \iff f(u_1 + u_2) = u_1 + u_2$$

$$\iff u_1 - 2u_2 = u_1 + u_2 \iff u_2 = 0_E$$

$$\iff u = u_1 \quad (\text{car } u = u_1 + u_2)$$

$$\iff u \in E_1$$

Bilan : $\ker(f - I) = E_1$

Par un raisonnement analogue, on a : $\ker(f + 2I) = E_2$

4. Soit $v \in E$. Comme $E_1 \oplus E_2 = E$, il existe un unique couple $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $v = v_1 + v_2$.

$$\text{Ainsi : } v \in \text{Im}(f - I) \iff \exists u \in E \quad v = (f - I)(u)$$

$$\iff \exists (u_1, u_2) \in E_1 \times E_2 \quad v_1 + v_2 = (f - I)(u_1 + u_2)$$

$$\iff \exists (u_1, u_2) \in E_1 \times E_2 \quad v_1 + v_2 = u_1 - 2u_2 - (u_1 + u_2)$$

$$\iff \exists (u_1, u_2) \in E_1 \times E_2 \quad v_1 + v_2 = -3u_2$$

$$\iff v_1 = 0_E \text{ et } v_2 \in E_2 \quad (\text{car } E_1 \oplus E_2 = E)$$

$$\iff v \in E_2 \quad (\text{car } v = v_1 + v_2)$$

Bilan : $\text{Im}(f - I) = E_2$

Par un raisonnement analogue, on a : $\text{Im}(f + 2I) = E_1$

5. Soit $u \in E$. D'où $(f + 2I)(u) \in \text{Im}(f + 2I)$.

Or $\text{Im}(f + 2I) = E_1 = \ker(f - I)$ donc $(f + 2I)(u) \in \ker(f - I)$ ce qui donne $(f - I) \circ (f + 2I)(u) = 0_E$.

Bilan : $f^2 + f - 2I = 0$ et $\alpha = -1$ et $\beta = -2$ conviennent.

Deuxième partie Étude des endomorphismes d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E vérifiant $f^2 + f - 2I = 0$

6. a. Soit $u \in E$.

$$\text{On a : } u \in \ker(f - I) \iff (f - I)(u) = 0_E \iff \boxed{f(u) = u}$$

$$\text{et : } u \in \ker(f + 2I) \iff (f + 2I)(u) = 0_E \iff \boxed{f(u) = -2u}$$

- b. Soit $u \in E$. Raisonnons par analyse-synthèse :

Analyse : Supposons qu'il existe $(u_1, u_2) \in \ker(f - I) \times \ker(f + 2I)$ tels que $u = u_1 + u_2$

d'où $f(u) = f(u_1) + f(u_2)$.

Or $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = -2u_2$ d'où $f(u) = u_1 - 2u_2$

$$\text{On résout : } \begin{cases} u = u_1 + u_2 \\ f(u) = u_1 - 2u_2 \end{cases} \iff \begin{cases} u = u_1 + u_2 \\ f(u) - u = -3u_2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_1 = \frac{1}{3}(2u + f(u)) \\ u_2 = \frac{1}{3}(-f(u) + u) \end{cases}$$

Synthèse : $u = \frac{1}{3}(2u + f(u)) + \frac{1}{3}(-f(u) + u)$

où $\frac{1}{3}(2u + f(u)) \in \ker(f - I)$ et où $\frac{1}{3}(-f(u) + u) \in \ker(f + 2I)$ car $f^2 + f - 2I = 0$.

La synthèse montre que tout élément de E peut s'écrire $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in \ker(f - I)$ et où $u_2 \in \ker(f + 2I)$. L'analyse garantit l'unicité d'une telle décomposition.

$$\ker(f - I) \oplus \ker(f + 2I) = E$$

7. On a : $p \circ q = \frac{1}{3}(2I + f) \circ \frac{1}{3}(I - f) = -\frac{1}{9}(f^2 + f - 2I) = 0$. Ainsi $p \circ q = 0$

On a : $q \circ p = \frac{1}{3}(I - f) \circ \frac{1}{3}(2I + f) = -\frac{1}{9}(f^2 + f - 2I) = 0$. Ainsi $q \circ p = 0$

8. a. Soit $v \in E$.

On a : $v \in \text{Im}(f + 2I) \iff \exists u \in E \quad v = (f + 2I)(u)$

D'où $(f - I)(v) = (f - I) \circ (f + 2I)(u)$

Or $(f - I) \circ (f + 2I) = -9q \circ p = 0$. D'où $(f - I)(v) = 0$. Donc $v \in \ker(f - I)$

Ainsi $\text{Im}(f + 2I) \subset \ker(f - I)$

Par un raisonnement analogue, on a : $\text{Im}(f - I) \subset \ker(f + 2I)$

b. On a : $p + q = \frac{1}{3}(2I + f) + \frac{1}{3}(I - f)$. D'où $p + q = I$

Soit $u \in E$.

On a donc : $u = \frac{1}{3}(2I + f)(u) + \frac{1}{3}(I - f)(u)$ où $\frac{1}{3}(2I + f)(u) \in \text{Im}(f + 2I)$ et

$\frac{1}{3}(I - f)(u) \in \text{Im}(f - I)$

Donc $E = \text{Im}(f + 2I) + \text{Im}(f - I)$

c. Soit $u \in \ker(f - I)$.

On a : $f(u) = u$. Donc : $(f + 2I)(u) = f(u) + 2u = 3u$.

D'où $u = \frac{1}{3}(f + 2I)(u) \in \text{Im}(f + 2I)$.

Ainsi $\ker(f - I) \subset \text{Im}(f + 2I)$.

De plus, $\text{Im}(f + 2I) \subset \ker(f - I)$. Donc : $\text{Im}(f + 2I) = \ker(f - I)$

Par un raisonnement analogue, on a : $\text{Im}(f - I) = \ker(f + 2I)$

9. a. On a : $p^2 = \frac{1}{3}(2I + f) \circ \frac{1}{3}(2I + f)$

$$= \frac{1}{9}(4I + 4f + f^2)$$

$$= \frac{1}{9}(4I + 4f - f + 2I)$$

$$= \frac{1}{9}(6I + 3f)$$

$$= \frac{1}{3}(2I + f) = p$$

Bilan : $p^2 = p$

Par un raisonnement analogue, on a : $q^2 = q$

b. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$

"il existe deux nombres réels α_n et β_n tels que $f^n = \alpha_n p + \beta_n q$ "

Initialisation : On a $f^0 = I$. On pose : $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 1$.

On a alors : $f^0 = \alpha_0 p + \beta_0 q$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n + 1)$ est vraie.

On a : $f^n = \alpha_n p + \beta_n q$.

Comme $f = p - 2q$, on a : $f^{n+1} = (\alpha_n p + \beta_n q) \circ (p - 2q)$

D'où $f^{n+1} = \alpha_n p^2 - 2\alpha_n p \circ q + \beta_n q \circ p - 2\beta_n q^2$

Or $p^2 = p$, $q^2 = q$, $q \circ p = 0$ et $p \circ q = 0$, d'où $f^{n+1} = \alpha_n p - 2\beta_n q$

En posant $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ et $\beta_{n+1} = -2\beta_n$, on a : $f^{n+1} = \alpha_{n+1} p + \beta_{n+1} q$.

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux nombres réels α_n et β_n tels que

$f^n = \alpha_n p + \beta_n q$ avec $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ et $\beta_{n+1} = -2\beta_n$

Comme (α_n) est la suite constante de 1er terme 1 et (β_n) est la suite géométrique de raison -2 et de 1er terme 1, on a : $\alpha_n = 1$ et $\beta_n = (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$