Devoir Surveillé n°1 (3 h)

L'emploi de la calculatrice et du portable est interdit. Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. Les résultats seront encadrés. Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{3}$.

Exercice 2.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2\cos^2 x - 3\sin x + 3 \geqslant 0$.

Exercice 3.

Linéariser $\mathrm{A} = \sin^2 x \cos x$ de deux façons différentes.

Exercice 4.

1 . Pour tout réel x, exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.

2 . En déduire pour tout entier naturel k et pour tout réel x, $\sin \dfrac{x}{3^k}$ en fonction de $\sin \dfrac{x}{3^{k+1}}$.

3 . Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3 \frac{x}{3^{k+1}} = \frac{3^{n+1}}{4} \sin \frac{x}{3^{n+1}} - \frac{1}{4}\sin x.$$

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x} = -2 + x$.

Exercice 6.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x = 0 \Leftrightarrow \big(\ \forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon\ \big)$

Exercice 7.

On considère la proposition P suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 0$

1 . Donner la négation de P.

2 . Préciser si la proposition P est vraie ou fausse.
Démontrer le cas échéant P ou sa négation.

Exercice 8.

1 . Déterminer sous forme algébrique les racines carrées complexes de $-3-4i$.

2 . On considère le polynôme P défini par $\mathrm{P}(z) = iz^3 + (-1+4i)z^2 + (3+7i)z + 2 + 10i$.

Déterminer le(s) nombre(s) imaginaire(s) pur(s) z (ie les complexes de la forme $z = iy$ où y réel) tel(s) que $\mathrm{P}(z) = 0$.

3 . Déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 9.

1 . Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 - i\sqrt{3}$.

2 . a . Justifier sans calcul que $\alpha_n = (1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n$ est un nombre réel pour tout entier naturel n.

b . Calculer α_n en fonction de n et montrer que α_n est toujours un entier relatif (on pourra envisager les cas : $n = 3p$, $n = 3p+1$ et $n = 3p+2$ où $p \in \mathbb{N}$).

Exercice 10.

1 . Soit Z un complexe non nul. Prouver que :

$\mathrm{Z} + \dfrac{1}{\mathrm{Z}}$ est un réel $\Leftrightarrow$ (Z est un réel ou $|\mathrm{Z}| = 1$)

2 . Soit la fonction f définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Etudier ses variations sur son domaine de définition. En conclure que $\left|x + \dfrac{1}{x}\right|$ possède pour $x \in \mathbb{R}^*$ un minimum que l'on calculera.

Dans toute la suite de l'exercice, a et b désignent deux complexes non nuls et (E) désigne l'équation : $z^2 - 2az + b = 0$.

On note z_1 et z_2 les racines complexes (éventuellement égales) de (E).

3 . Déterminer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ en fonction de a et b.

4 . On suppose que $|z_1| = |z_2|$. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique puis en déduire la forme trigonométrique de $\dfrac{a^2}{b}$. Conclure que $\dfrac{a^2}{b} \in]0,1]$.

5 . Réciproquement, montrer que si $\dfrac{a^2}{b} \in]0,1]$ alors $|z_1| = |z_2|$.

(on pourra poser $\mathrm{Z} = \dfrac{z_1}{z_2}$ et utiliser les questions 1 et 2).