Lycée Gustave Eiffel | Année 2011-2012
Mathématiques PTSI | Devoir Surveillé n°3
26 novembre 2011 | Durée 4h

Fonctions usuelles - Équations différentielles
Géométrie du plan - Courbes

---

1. *L'usage de la calculatrice est* **interdit**.
2. *La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. On prendra également soin d'indiquer clairement les résultats admis.*
3. *Les candidats sont invités à encadrer ou à souligner leurs résultats.*

Exercice 1. *Deux équations différentielles*

Les deux questions sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2} \qquad (E_1)$$
2. Résoudre l'équation différentielle (E_2) d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$2y'' + 2y' + 5y = 4 \qquad (E_2)$$

Exercice 2. *Étude d'une fonction*

Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x)) + \arccos(\mathrm{th}(x))$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de x peut-on calculer $f'(x)$? Dans ce cas, prouver que $f'(x) = 0$.
3. Simplifier alors $f(x)$ pour tout $x \in D$.
4. Pour quelle valeur de α a-t-on $\mathrm{th}(\alpha) = \dfrac{5}{13}$? On exprimera α à l'aide de la fonction ln.
5. **Bonus** Montrer que l'équation $\arctan(x) + \arccos\left(\dfrac{5}{13}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ a une unique solution β dans $\mathbb{R}$. Exprimer β à l'aide α puis déterminer β comme un quotient de deux entiers.

Exercice 3. *Calcul d'une somme*

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1^2+1+1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2^2+2+1}\right) + \cdots + \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\tan(\arctan(n+1) - \arctan(n))$.
En déduire que $\arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan \dfrac{1}{n^2+n+1}$.
2. En déduire une simplification de S_n puis la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. *Une équation différentielle et une équation fonctionnelle*

1. On considère l'équation différentielle :

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x^3 - \frac{1}{x} \qquad (E)$$

Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. On définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall x > 0 \quad y(x) = z(\ln x)$ autrement dit $\forall t \in \mathbb{R} \quad z(t) = y(\mathrm{e}^t)$.

   (a) Montrer que y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est solution de l'équation différentielle (G)
   $$z''(t) - 2z'(t) + z(t) = \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t} \qquad (G)$$

   (b) Résoudre l'équation différentielle (F_m) de paramètre réel $m \neq 1$ (un seul cas)
   $$z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^{mt} \qquad (F_m)$$

   (c) Résoudre (G) puis (E).

2. **Bonus** On se propose de déterminer toutes les fonctions f vérifiant le problème noté (P) :
$$f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et pour tout } x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) + x^2$$
Pour cela, on procède à un raisonnement analyse-synthèse.

   (a) Montrer que si f est une solution de (P) alors f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et est une solution de l'équation différentielle (E).

   (b) Faire la synthèse et conclure.

Exercice 5. *Étude d'une famille de droite*

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Pour tout réel m, on considère la droite D_m d'équation $(1-m^2)x + 2my + (m^2 - 2m - 3) = 0$.

1. Justifier que pour tout réel m, D_m est une droite du plan.
2. Existe-t-il un point qui appartienne à toutes les droites D_m pour m décrivant $\mathbb{R}$?
3. Soient m et p deux réels distincts. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur m et p pour que les droites D_m et D_p soient parallèles.
4. Déterminer la (les) valeur(s) de m pour que les droites D_m et D_2 soient perpendiculaires (on pourra s'assurer que les valeurs de m trouvées vérifient la condition de la question précédente).
5. Soit Γ le cercle de centre O et de rayon 1. Prouver qu'il existe exactement trois valeurs de m pour lesquelles la droite D_m est tangente au cercle Γ (préciser les valeurs de m).

Exercice 6. *Étude d'une courbe*

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit la courbe Γ de représentation paramétrique : $x(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$ et $y(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$ où $t \in]-1,1[$

1. Dresser le tableau de variations de x et y sur $]-1,1[$.
2. Etudier les branches infinies de Γ. On effectuera l'étude globale de la position relative de la courbe Γ par rapport à l'asymptote oblique que l'on notera Δ.
3. Tracer Γ (on prendra 2cm comme unité sur l'axe des abscisses et des ordonnées).