Lycée Gustave Eiffel | Année 2011-2012
Mathématiques PTSI | Devoir Surveillé n°4
14 janvier 2012 | Durée 2h

Courbes polaires - Géométrie dans l'espace
Comparaisons de fonctions

La calculatrice est interdite.

Exercice 1. *Détermination d'une asymptote*

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

1. Donner un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$.
2. (a) **Question de cours :** Donner un équivalent usuel faisant intervenir la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
   (b) En utilisant cette équivalent, montrer que la fonction f admet une asymptote dont on précisera une équation cartésienne.

Exercice 2. *Des droites, des plans et une famille de points*

Soit $\mathcal{E}$ l'espace muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (\ \mathrm{O}, \vec{i}\ , \vec{j}\ , \vec{k}\ )$.
Soient les plans P et Q d'équations cartésiennes $P : x+z=0$, $Q : x+y+z-3=0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, soit le point $N(t)$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$ défini par $\begin{cases} a(t) = \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \\ b(t) = \sin(t) \\ c(t) = -\dfrac{\cos(t)}{\sqrt{2}} \end{cases}$

1. Prouver que $N(t)$ appartient au plan P.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D intersection de P et Q.
3. Calculer $a^2(t)+b^2(t)+c^2(t)$. En déduire que $N(t)$ appartient à un cercle du plan P dont on précisera le centre et le rayon.
4. Calculer la distance de $N(t)$ à la droite D puis la distance de $N(t)$ au plan Q. Vérifier que leur rapport est constant.
5. Soit la famille de droites $(\Delta_m)_{m\in\mathbb{R}}$ définie par le système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x-2my+4m-1=0 \\ y+z+3=0 \end{cases}$
   (a) Donner un point A_m et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_m}$ de Δ_m.
   (b) Déterminer m pour que les droites D et Δ_m soient coplanaires.
   (c) Pour cette valeur de m, déterminer une équation cartésienne du plan R qui contient D et Δ_m.
   (d) Existe-t-il m tel que la droite Δ_m soit parallèle au plan P ? Si oui, déterminer m.
   (e) Montrer que toutes les droites (Δ_m) passent par un unique point fixe dont on précisera les coordonnées.

Exercice 3. *Étude d'une courbe polaire*

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (\ \mathrm{O}, \vec{i}\ , \vec{j}\ )$.
Soit Γ la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta} + 2$.

1. Déterminer le domaine de définition D de ρ puis réduire l'étude à $[0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$.
2. Etudier les variations de ρ et le signe de ρ sur $[0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$.
3. Donner la direction des tangentes aux points de paramètres $2\pi/3$ et π.
4. Etudier la (les) branche(s) infinie(s).
5. Préciser la position de Γ par rapport à la droite Δ d'équation $x = 1$ pour $\theta \in [0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$.
6. Représenter la courbe Γ sur $]\pi/2, \pi]$.