Lycée Gustave Eiffel | Année 2011-2012
Mathématiques PTSI | Devoir Surveillé n°5
4 février 2012 | Durée 4h

Groupes - Ensembles - Applications
Développements limités - Suites

La calculatrice est interdite. La qualité et la précision de la rédaction seront cruciales dans l'appréciation des copies. On prendra également soin d'encadrer les résultats obtenus.

Exercice 1. *Étude d'une application*

Soit la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{z^2}{z - 2\mathrm{i}}$ où z est une variable complexe.

1 . Déterminer le domaine de définition D de f.

2 . **a .** Déterminer les racines carrées complexes de $8 - 6\mathrm{i}$.

b . En déduire les antécédents de $1 + \mathrm{i}$ par f.

3 . Soit h un complexe. Discuter en fonction de h le nombre d'antécédents de h par f.

4 . Déterminer l'image de D par f notée $f(D)$.
L'application f est-elle surjective de D dans $\mathbb{C}$?

5 . L'application f est-elle injective de D dans $\mathbb{C}$?

Exercice 2. *Étude locale de deux fonctions*

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1 . Déterminer le développement limité de f d'ordre 2 au voisinage de 0.

2 . En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

3 . Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f de f au point d'abscisse 0 et préciser la position de C_f par rapport à T au voisinage de 0.

4 . Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{1/x} - 1}$ si $x > 0$.

a . Déterminer trois réels a, b et c tels que $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
(on pourra utiliser la question 1)

b . En déduire que la courbe de g admet une asymptote oblique Δ au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera une équation.

Exercice 3. *Étude d'une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}^2$

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la loi interne $*$ par

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 \quad (x, y) * (x', y') = (xx' + 3yy', xy' + yx')$$

1 . Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

2 . Montrer que la loi $*$ a un élément neutre à préciser.

3 . $(\mathbb{R}^2, *)$ est-il un groupe ?

Exercice 4. *Étude d'une caustique de cercle*

On considère la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)(1 + 2\sin^2(t)) \\ y(t) = 2\sin^3(t) \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

1 . Montrer que l'on peut réduire l'étude de Γ à l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2 . Étudier les variations de x et de y.

3 . Étudier la nature de l'unique point stationnaire de Γ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4 . Tracer la courbe Γ (échelle 4cm)

Exercice 5. *Étude d'une fonction*

Dans tout cet exercice, on notera sh la fonction sinus hyperbolique, ch la fonction cosinus hyperbolique et th la fonction tangente hyperbolique.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1 . Étudier la parité de f.

2 . a . Rappeler un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b . Déterminer la limite de f en 0.

3 . Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \left(\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

4 . Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathrm{th}(X) < X$.

5 . En déduire le tableau de variations de f.

6 . Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $\left(X \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(X)}{X}\right)$.

7 . En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet un développement de la forme :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

où $a_0, \ldots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.

8 . Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F, puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. *Étude de suites définies par des sommes*

Soit la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Nous nous proposons de démontrer de deux façons différentes que cette suite converge.

1 . Première méthode :

a . Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
En déduire que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est majorée.

b . Montrer alors que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

2 . Deuxième méthode : On considère la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ définie par $\forall n \geq 1$, $t_n = s_n + \dfrac{1}{n}$.
Montrer que les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ convergent vers une même limite.
Dans la suite, on notera S la limite de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$. (on ne cherchera pas à la calculer)

3 . Soient les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \text{ et } w_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

a . Exprimer u_n en fonction de s_n.
En déduire que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite en fonction de S.

b . Montrer alors que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite en fonction de S.

c . En déduire que $(w_n)_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite en fonction de S.