Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI Devoir Surveillé n°6
17 mars 2012 Durée 3h

Polynômes - Suites

Problème 1. *Étude des dérivées successives d'une fonction*

Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x)y$.
On note I l'intervalle $]-\infty, 1[$.

1 . Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par $a(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$.

2 . Intégrer (E) sur I.
Soit f la fonction définie sur I par : $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

3 . Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.

4 . Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \text{pour tout } x \in I$$

La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P'_n(X)$ et X. Expliciter cette relation.

5 . Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.

6 . En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_{n+1}(X) = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n(X) - n^2 X^2 \, P_{n-1}(X)$$

Le but de la suite est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.

7 . Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.

8 . a . Préciser, sans nouveau calcul : a_0, a_1, a_2 et a_3. En déduire a_4.

b . Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.

9 . On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par $u_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i!}$. On admet que la suite (u_p) converge vers e.

p et n désignant des entiers naturels quelconques, on pose : $S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$.

a . Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geq 1$.

b . Prouver que les suites $p \mapsto S_p(0)$ et $p \mapsto S_p(1)$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.

10 . Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :

$$S_p(n+1) - (2n+2)\, S_p(n) + n^2 \, S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

11 . En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $p \mapsto S_p(n)$ converge.

12 . Prouver que

$$a_n = \lim_{p \to +\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim_{p \to +\infty} n! \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} \frac{1}{i!}$$

Exercice 1. *Étude d'une suite*

On considère f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 4} - 2$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1 . Dresser le tableau de variations de f.

2 . Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

3 . Préciser la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4 . En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on précisera.

5 . Montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \quad |f'(x)| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6 . En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

Exercice 2. *Étude d'un polynôme*

Soit le polynôme $P = X^6 - 5X^4 + 8X^3 - 9X^2 + aX + b$ où a, b sont des réels.

1 . Déterminer a et b pour que 1 soit une racine de P d'ordre au moins deux.
Désormais, avec les valeurs de a et b trouvées, quel est l'ordre de multiplicité m de 1 comme racine du polynôme P ?

2 . Vérifier le résultat en effectuant la division euclidienne de P par $(X-1)^m$ pour les valeurs de a et b trouvées. Préciser la valeur du quotient Q.

3 . Factoriser Q en un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ puis de $\mathbb{C}[X]$.

4 . En déduire la factorisation de P en un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ puis de $\mathbb{C}[X]$.

5 . Factoriser $P(X^2)$ en un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.