Lycée Gustave Eiffel | Année 2011-2012
Mathématiques PTSI | Devoir Surveillé n°8
19 mai 2012 | Durée 4h

Algèbre linéaire - Intégration

L'emploi de la calculatrice et du portable est interdit. Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction. Les résultats seront encadrés. Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Problème 1. *Étude d'une suite d'intégrales.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$

1. a. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b. En déduire qu'elle est convergente. On notera ℓ sa limite.

c. Justifier que pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leq 1+t$ et en déduire que $\ell = 0$.

2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$:
$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p = \frac{2}{3+t^2} - (-1)^{n+1} \frac{2}{3+t^2} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}$$

b. Vérifier l'inégalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3+t^2} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t \leq \frac{2}{3} a_{n+1}$

c. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{3}\,u$.

d. En conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Exercice 1. *Étude d'endomorphismes de* $\mathbb{R}^3$

Soit l'application f définie par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (-x+y+z, -x+z, -x+z)$.

1. a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer une base de $\ker(f)$. En déduire le rang de f.

c. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires de $\mathbb{R}^3$?

3. Vérifier que $f^3 = -f$. En déduire f^4 et f^5.

4. Soit $G = \{f, f^2, f^3, f^4\}$.

a. Faire la table de G pour la loi de composition. En déduire que $(G, \circ)$ est un groupe commutatif.

b. Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $\ker(v) \subset \ker(u \circ v)$ et que $\mathrm{Im}(u \circ v) \subset \mathrm{Im}(u)$.

c. En déduire que tous les éléments du groupe $(G, \circ)$ ont le même noyau et la même image.

5. Montrer que f^4 est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques en fonction de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2. *Étude d'un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On pose $P_0(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$.
Pour tout polynôme $P(X)$ de E, on note $\hat{P}(X)$ le reste de la division euclidienne de P par P_0 et f l'application de E dans E définie par $f(P) = \hat{P}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X]$.

3. Déterminer une base du noyau de f.

4. Comparer f^2 et f. Reconnaître f et donner ses éléments caractéristiques.

Problème 2. *Étude d'une fonction définie par une intégrale*

Lorsque cela a un sens, on pose $\psi(t) = \dfrac{1}{t+\sin(t)}$ et $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $t + \sin(t) = 0$.
(on commencera par montrer que l'équation (E) a une unique solution dans $\mathbb{R}$).

2. Déterminer en fonction de t le signe exact de $\delta(t) = t + \sin(t)$.

3. **a.** Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ sous forme factorisée.

c. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

d. Etudier la parité de f.

4. On se propose de déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

a. Montrer que pour tout $x > 0$, $\left| f(x) - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t\big(t+\sin(t)\big)}$.

b. Justifier qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour tout $t \geq m$, $t + \sin(t) \geq \dfrac{t}{2}$

c. En déduire que f possède une limite finie ℓ lorsque $x \to +\infty$ que l'on déterminera.

5. On se propose de déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

a. Déterminer un développement asymptotique de $\psi(t)$ lorsque $t \to 0$ sous la forme :
$\psi(t) = \dfrac{a}{t} + bt + \underset{t\to 0}{o}(t)$ ie $\psi(t) = \dfrac{a}{t} + bt + t\varepsilon(t)$ où $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

b. Soit θ définie par $\theta(t) = \dfrac{1}{t+\sin(t)} - \dfrac{a}{t}$.
Préciser le domaine de définition de θ.

c. Montrer que l'on peut prolonger θ par continuité en 0. Préciser alors la valeur de $\theta(0)$.
On notera encore θ la fonction ainsi prolongée en 0.

d. Justifier que $M = \max\limits_{t\in[-1,1]} |\theta(t)|$ existe.

e. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_x^{2x} \theta(t)\ \mathrm{d}t$ puis de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

6. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
Si oui, préciser $f(0)$. La fonction f ainsi prolongée, est -elle alors dérivable en 0 ?

7. **a.** Préciser une méthode qui permettrait d'obtenir les valeurs approchées suivantes :
$f(\pi) \approx 0,81$ et $f(2\pi) \approx 0,68$

b. On admet que $\ln(2) \approx 0,69$. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.