Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°1
Rendu le 21 septembre 2011

Étude d'une suite - Résolution d'une équation
Exercice n°23 - feuille 0 Partie I
Exercice n°9 (1) - feuille 0 Partie I

---

1 Énoncé

1.1 Feuille n°0 - Partie I

Exercice 23. *Une suite(2)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$.

Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 1$.

1.2 Feuille n°1

Exercice 9. *Équations*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(3x) + \sin(2x) + \sin(x) = 0$

2 Résolution

2.1 Exercice 23 - feuille n°0 - Partie I

Remarque 2.1. *Dans cet exercice, la relation de récurrence nous donne u_{n+2} en fonction de u_n et u_{n+1}. Il faut donc connaître u_n et u_{n+1} pour pouvoir calculer u_{n+2}. Par conséquent, notre hypothèse de récurrence ne peut inclure seulement la formule de u_n. Elle doit inclure également celle de u_{n+1}.*

Montrons, par récurrence que ; $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1 \quad (\mathcal{P}_n)$.
Initialisation : On a : $u_0 = 0$ et : $2^0 - 1 = 0$.
Donc : $u_0 = 2^0 - 1$.
On a : $u_1 = 1$ et $2^1 - 1 = 1$.
Donc : $u_1 = 2^1 - 1$.
D'où : $u_0 = 2^0 - 1$ et $u_1 = 2^1 - 1$.
On en déduit que la propriété $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose $(\mathcal{P}_n)$.
Montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$.
C'est-à-dire : montrons : $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ et $u_{n+2} = 2^{n+2} - 1$.
Par la propriété $(\mathcal{P}_n)$, on a déjà : $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.
On a également : $u_n = 2^n - 1$.
Or : $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Donc :
$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) \\ &= (6-2)2^n - 3 + 2 \\ &= 4.2^n - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$
D'où : $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ et $u_{n+2} = 2^{n+2} - 1$.
On a donc démontré $(\mathcal{P}_{n+1})$.
La propriété est donc héréditaire.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$
On en déduit :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 1}$$

2.2 Exercice 9 - feuille n°1

1. On a :
$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x + x) \\ &= \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) \\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + (2\cos^2(x) - 1)\sin(x) \\ &= (4\cos^2(x) - 1)\sin(x) \end{aligned}$$
Donc :
$$\begin{aligned} \sin(3x) + \sin(2x) + \sin(x) &= (4\cos^2(x) - 1)\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) \\ &= (4\cos^2(x) + 2\cos(x))\sin(x) \\ &= 2(2\cos(x) + 1)\cos(x)\sin(x) \end{aligned}$$
D'où :
$$\begin{aligned} \sin(3x) + \sin(2x) + \sin(x) = 0 &\iff \cos(x) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ ou } \cos(x) = 0 \\ &\qquad \text{ou } \sin(x) = 0 \\ &\iff x = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \\ &\qquad \text{ou } x = \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } x = 0[\pi] \\ &\iff x = 0\left[\frac{2\pi}{3}\right] \text{ ou } x = 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les solutions de l'équation sont les nombres de la forme :} \\ \dfrac{2k\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{k\pi}{2} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}\end{array}}$$