Linéarisation - Résolution d'une équation

Exercice n°15 (3) - feuille 2

Exercice n°22 (6) - feuille 2

1 Énoncé

Exercice 15. Linéarisation

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes :

3. $\sin^5(x) + \cos^4(x) \sin(x)$

Exercice 22. Équations

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

6. $\left(\frac{iz+1}{z-2}\right)^2 - (1+2i)\left(\frac{iz+1}{z-2}\right) + i - 1 = 0$

2 Résolution

2.1 Exercice 15 (3)

3. On a : $\sin^5(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5$
 $= \frac{e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}}{32i}$
 $= \frac{1}{16} (\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x))$
 et : $\cos^4(x) \sin(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)$
 $= \frac{(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})(e^{ix} - e^{-ix})}{32i}$
 $= \frac{e^{5ix} + 3e^{3ix} + 2e^{ix} - 2e^{-ix} - 3e^{-3ix} - e^{-5ix}}{32i}$
 $= \frac{1}{16} (\sin(5x) + 3\sin(3x) + 2\sin(x))$

D'où :

$$\sin^5(x) + \cos^4(x) \sin(x) = \frac{1}{8} \sin(5x) - \frac{1}{8} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x)$$

2.2 Exercice n°22 (6)

6. On résout l'équation : $\left(\frac{iz+1}{z-2}\right)^2 - (1+2i)\left(\frac{iz+1}{z-2}\right) + i - 1 = 0 \quad (E)$.

On pose : $Z = \frac{iz+1}{z-2}$.

On a : $(E) \iff Z^2 - (1+2i)Z + i - 1 \quad (E')$.

Le discriminant de l'équation (E') est : $\Delta = (1+2i)^2 - 4(i-1) = 1$.

Les racines de (E') sont :

$$Z_1 = \frac{1+2i+1}{2} = 1+i \text{ et } Z_2 = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

Donc : $(E) \iff \frac{iz+1}{z-2} = 1+i \quad (E_1)$ ou $\frac{iz+1}{z-2} = i \quad (E_2)$.

Or : $\frac{iz+1}{z-2} = 1+i \iff iz+1 = (1+i)(z-2) \iff z = 3+2i$

et ! $\frac{iz+1}{z-2} = i \iff iz+1 = i(z-2) \iff 1 = -2i$

D'où : $(E) \iff z = 3+2i$.

L'unique solution de (E) est donc : $3+2i$.