Résolution d'une équation
 Exercice n°26 - feuille 2

1 Énoncé

Exercice 26. Résoudre l'équation suivante :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1$$

2 Résolution

On résout l'équation :

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1 \quad (E)$$

Le domaine de définition de l'équation est : $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$.

On pose : $X = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$.

On a alors : $(E) \iff X + \frac{1}{X} = 1 \iff X^2 - X + 1 = 0$

$$\iff \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$\iff \left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$\iff X = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } X = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff X = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } X = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

On résout donc l'équation : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad (E')$

On a : $(E') \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\} \quad \frac{z+1}{z-1} = e^{i\left(\frac{\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad (E_k)$

Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } (E_k) &\iff z+1 = e^{i\frac{6k+1}{3n}\pi}(z-1) \\ &\iff \left(e^{i\frac{6k+1}{3n}\pi} - 1\right)z = e^{i\frac{6k+1}{3n}\pi} + 1 \end{aligned}$$

Or, $e^{i\frac{6k+1}{3n}\pi}$ est une racine $n^{\text{ème}}$ de $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Donc : $e^{i\frac{6k+1}{3n}\pi} - 1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{D'où : } (E_k) \iff z &= \frac{e^{i\frac{6k+1}{3n}\pi} + 1}{e^{i\frac{6k+1}{3n}\pi} - 1} \iff z = \frac{e^{i\frac{6k+1}{6n}\pi} + e^{-i\frac{6k+1}{6n}\pi}}{e^{i\frac{6k+1}{6n}\pi} - e^{-i\frac{6k+1}{6n}\pi}} \\ &\iff z = \frac{2 \cos\left(\frac{6k+1}{6n}\pi\right)}{2i \sin\left(\frac{6k+1}{6n}\pi\right)} \iff z = -i \frac{\cos\left(\frac{6k+1}{6n}\pi\right)}{\sin\left(\frac{6k+1}{6n}\pi\right)} \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \cos\left(\frac{6k+1}{6n}\pi\right) \iff \frac{6k+1}{6n}\pi = \frac{\pi}{2}[\pi] \iff 6k+1 = 3n[6n].$$

Le nombre $6k+1$ n'est pas un multiple de 3 et un nombre congru à $3n$ modulo $6n$ l'est.

Donc : $\cos\left(\frac{6k+1}{6n}\pi\right) \neq 0$.

Les solutions de (E') sont les nombres de la forme : $-\frac{i}{\tan\left(\frac{6k+1}{6n}\pi\right)}$ où $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

On résout également : $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad (E'')$

On a : $(E'') \iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{-i\frac{\pi}{3}} \iff \left(\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}\right)^n = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\iff \bar{z}$ est solution de (E')

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\} \quad \bar{z} = -\frac{i}{\tan\left(\frac{6k+1}{6n}\pi\right)}$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\} \quad z = \frac{i}{\tan\left(\frac{6k+1}{6n}\pi\right)}$$

On en déduit que les solutions de (E) sont les nombres de la forme :

$$-\frac{i}{\tan\left(\frac{6k+1}{6n}\pi\right)}$$

et les nombres de la forme :

$$\frac{i}{\tan\left(\frac{6k+1}{6n}\pi\right)}$$

où $k \in \{0, \dots, n-1\}$.