Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°4
Rendu le 12 octobre 2011

Résolution d'une équation
Exercice n°26 - feuille 2

1 Énoncé

Exercice 9. *Étudier la familles de fonctions suivantes :*

1. $f_n(x) = x\ln^n(x)$ où $n \in \mathbb{N}$.

2 Résolution

La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\boxed{\text{Les fonctions } f_n \text{ sont donc définies sur } \mathbb{R}^{+*}.}$$

On a : $f_0(x) = x$.
On suppose donc pour la suite $n \neq 0$.
On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f_n(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ se prolonge par continuité en 0 en posant } f_n(0) = 0.}$$

Par produits de fonctions dérivables, les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Remarque 2.1. *Si f est une fonction dérivable, alors $(f^n)' = nf'f^{n-1}$. On applique ce résultat à la fonction* ln.

On a : $f_n'(x) = \ln^n(x) + x\dfrac{n\ln^{n-1}(x)}{x} = \ln^n(x) + n\ln^{n-1}(x) = \ln^{n-1}(x)(\ln(x)+n)$.
Or : $\ln(x)+n \geq 0 \iff \ln(x) \geq -n \iff x \geq \mathrm{e}^{-n}$.
Et :

1. Si n est pair, alors $n-1$ est impair et donc $\ln^{n-1}(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq 0 \iff x \geq 1$.
2. Si n est impair, alors $n-1$ est pair et donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \ln^{n-1}(x) \geq 0$.

De plus, $\ln^{n-1}(x) = 0 \iff (x = 1 \text{ et } n \geq 2)$.
D'autre part, par les croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f_n(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\ln^n(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ se prolonge donc en 0 par continuité en posant } f_n(0) = 0.}$$

On étudie la dérivabilité de f_n en 0.
On a : $\dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x-0} = \ln^n(x)$.
Puisque nous avons supposé $n \neq 0$, on obtient :
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x-0} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Dans tous les cas, la fonction } f_n \text{ admet une tangente verticale en} \\ \text{0 et n'est donc pas dérivable en 0.}\end{array}}$$

On en déduit les tableaux de variations suivants :

1. Si n est pair :

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$\ln^{n-1}(x)$	$\|$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\ln(x)+n$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f_n'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{n^n}{e^n}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. Si n est impair et $n \neq 1$:

x	0		e^{-n}		1		$+\infty$
$\ln^{n-1}(x)$	$\|$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	
$\ln(x)+n$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f_n'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{n^n}{e^n}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Si $n = 1$:

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$\ln(x)+1$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f_1'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	1	$+$	
$f_1(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.
Donc :

$$\boxed{\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty}$$

On a : $\dfrac{f_n(x)}{x} = \ln^n(x)$.
Donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty$.

> La fonction f_n admet donc en $+\infty$ une branche parabolique verticale en $+\infty$.

Nous étudions également la convexité de f_n.
La fonction f_n' est une somme de fonctions dérivables. Elle est donc dérivable.
On traite à part le cas $n = 1$.
On a : $f_1'(x) = \ln(x) + 1$.
Donc : $f_1''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$

$$\boxed{\text{La fonction } f_1 \text{ est convexe.}}$$

On a : $f_n''(x) = \dfrac{n \ln^{n-1}(x)}{x} + \dfrac{n(n-1)\ln^{n-2}(x)}{x} = \dfrac{n \ln^{n-2}(x)(\ln(x) + n - 1)}{x} = \dfrac{n\, f_{n-1}'(x)}{x}$.
Ainsi, $f_n''(x)$ est du même signe que $f_{n-1}'(x)$. On en déduit :

1. Si n est pair et $n \neq 2$:

x	0		$\mathrm{e}^{-(n-1)}$		1		$+\infty$
$f_n''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	

2. Si n est impair et $n \neq 1$:

x	0		$\mathrm{e}^{-(n-1)}$		1		$+\infty$
$f_n''(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Si $n = 2$:

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f_n''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	

> 1. Si n est pair, alors la fonction f_n est concave sur $]0, \mathrm{e}^{-(n-1)}[$ et convexe sur $]\mathrm{e}^{-(n-1)}, +\infty[$.
>   Elle admet donc un point d'inflexion en $\mathrm{e}^{-(n-1)}$.
> 2. Si n est impair et $n \neq 1$, alors la fonction f_n est convexe sur $]0, \mathrm{e}^{-(n-1)}[$, concave sur $]\mathrm{e}^{-(n-1)}, 1[$ et convexe sur $]1, +\infty[$.
>   Elle admet donc un point d'inflexion en $\mathrm{e}^{-(n-1)}$ et en 1.

On a la figure suivante :