Résolution de deux équations
Exercice n°20 (5) - feuille 3
Exercice n°29 (6) - feuille 3

1 Énoncé

Exercice 20. *Résoudre l' équation suivante :*

5. $\mathrm{sh}(x) - 4\mathrm{sh}(2x) + \mathrm{sh}(3x) = 0$

Exercice 29. *Résoudre l' équation suivante :*

6. $\arctan(x) + \arctan(3x) = \dfrac{\pi}{4}$

2 Résolution

2.1 Exercice 20 (5)

5. On résout l'équation :

$$\mathrm{sh}(x) - 4\mathrm{sh}(2x) + \mathrm{sh}(3x) = 0 \qquad (E)$$

On a : $\mathrm{sh}(2x) = \mathrm{sh}(x+x) = 2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)$
$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}(x+x) = \mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)$
et :
$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(3x) = \mathrm{sh}(x+2x) &= \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(2x) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(2x)\\ &= \mathrm{sh}(x)(\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x)) + \mathrm{ch}(x)(2\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x))\\ &= \mathrm{sh}(x)(3\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x))\\ &= \mathrm{sh}(x)(3\mathrm{ch}^2(x) + (\mathrm{ch}^2(x) - 1))\\ &= \mathrm{sh}(x)(4\mathrm{ch}^2(x) - 1)\end{aligned}$$

D'où :
$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(x) - 4\mathrm{sh}(2x) + \mathrm{sh}(3x) &= \mathrm{sh}(x) - 8\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)(4\mathrm{ch}^2(x) - 1).\\ &= \mathrm{sh}(x)(4\mathrm{ch}^2(x) - 8\mathrm{ch}(x))\\ &= 4\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x)(\mathrm{ch}(x) - 2)\end{aligned}$$

Or : $\mathrm{ch}(x) \geq 1$.
Par conséquent, on a :
$$\begin{aligned}(E) &\iff (\mathrm{sh}(x) = 0 \text{ ou } \mathrm{ch}(x) = 2).\\ &\iff (x = 0 \text{ ou } x = \mathrm{Argch}(2) \text{ ou } x = -\mathrm{Argch}(2))\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ sont donc : } 0,\ \mathrm{Argch}(2) \text{ et } -\mathrm{Argch}(2).}$$

2.2 Exercice 29 (6)

6. On résout l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4} \qquad (E)$$

La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$. L'équation (E) est donc définie sur $\mathbb{R}$.
On procède par analyse synthèse.
Analyse : On suppose que x est solution de l'équation.
Déterminons les valeurs possibles de x.
On a :
$$\begin{aligned}\tan(\arctan(x) + \arctan(3x)) &= \frac{\tan(\arctan(x)) + \tan(\arctan(3x))}{1 - \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(3x))}.\\ &= \frac{x + 3x}{1 - x.3x} = \frac{4x}{1 - 3x^2}\end{aligned}$$

or : $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$. Donc : $\dfrac{4x}{1-3x^2} = 1$. D'où : $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

Or :
$$\begin{aligned}3x^2 + 4x - 1 &= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\right) = 3\left(\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}\right)\\ &= 3\left(x + \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x + \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\end{aligned}$$

D'où : $x = -\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ ou $x = \dfrac{\sqrt{7}-2}{3}$.
Synthèse : Nous devons déterminer quelles sont les valeurs trouvées qui sont solutions de (E).

(a) Nous déterminons d'abord le nombre de solutions :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(x) + \arctan(3x)$.
Les fonctions arctan et $(x \mapsto 3x)$ sont strictement croissantes et continues.
Par composée et addition de fonctions continues et strictement croissantes, la fonction f est continue et strictement croissante.
D'autre part, on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.
D'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \pi$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\pi$.
La fonction f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi, \pi[$.
Or : $\dfrac{\pi}{4} \in]-\pi, \pi[$.
L'équation (E) admet donc une unique solution.

(b) Nous devons donc éliminer une des solutions :
Remarquons que $f(0) = 0 < \dfrac{\pi}{4}$.
Cette solution est donc strictement positive.
Or : $-\dfrac{2+\sqrt{7}}{3} < 0$.

$$\boxed{\text{L'unique solution de } (E) \text{ est donc : } \frac{\sqrt{7}-2}{3}.}$$