

Quatre primitives
Exercice n°1 (12,13,23,27) - feuille 4

1 Énoncé

Exercice 1. Déterminer les primitives des fonctions suivantes

12. $\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}$ 13. $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ 23. $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ 27. $(x^2 + 2x + 2) \cos(x)$

2 Résolution

12. On a : $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

Donc, la fonction $\left(x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit u la fonction définie par $u(x) = x^2 + x + 1$.

On a : $u'(x) = 2x + 1$. Ainsi : $\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3} = \frac{u'(x)}{u^3(x)}$.

Une primitive de $\left(x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\right)$ est donc la fonction d'expression :

$$-\frac{1}{2u^2(x)} = -\frac{1}{2(x^2+x+1)^2}.$$

Les primitives de $\left(x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}\right)$ sont donc les fonctions d'expressions : $-\frac{1}{2(x^2+x+1)^2} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

13. On a : $x^2 + 2 > 0$.

La fonction $\left(x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit u la fonction définie par $u(x) = x^2 + 2$.

On a : $u'(x) = 2x$. Ainsi : $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Une primitive de $\left(x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$ est donc la fonction d'expression : $\sqrt{x^2+2}$.

Les primitives de $\left(x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$ sont donc les fonctions d'expressions : $\sqrt{x^2+2} + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

23. On a : $x^2 + 5 > 0$.

Donc, la fonction $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)$.

On a : $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{Argsh}'\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)$.

Une primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)$ est donc la fonction d'expression :

$\text{Argsh}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)$.

Les primitives de $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right)$ sont donc les fonctions d'expressions : $\text{Argsh}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

27. La fonction $(x \mapsto (x^2 + 2x + 2) \cos(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$.

On calcule : $F(x) = \int_0^x (t^2 + 2t + 2) \cos(t) dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On fait une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= t^2 + 2t + 2 & v_1'(t) &= \cos(t) \\ u_1'(t) &= 2t + 2 & v_1(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

Les fonctions u_1 et v_1 sont dérivables de dérivées continues.

On obtient : $F(x) = [(t^2 + 2t + 2) \sin(t)]_0^x - \int_0^x (2t + 2) \sin(t) dt$

$$= (x^2 + 2x + 2) \sin(x) - \int_0^x (2t + 2) \sin(t) dt$$

On fait une intégration par parties en posant :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= 2t + 2 & v_2'(t) &= \sin(t) \\ u_2'(t) &= 2 & v_2(t) &= -\cos(t) \end{aligned}$$

Les fonctions u_2 et v_2 sont dérivables de dérivées continues.

On obtient : $F(x) = (x^2 + 2x + 2) \sin(x) + [(2t + 2) \cos(t)]_0^x - \int_0^x 2 \cos(t) dt$

$$\begin{aligned} &= (x^2 + 2x + 2) \sin(x) + (2x + 2) \cos(x) - 2 - [2 \sin(t)]_0^x \\ &= (x^2 + 2x + 2) \sin(x) + (2x + 2) \cos(x) - 2 - 2 \sin(x) \\ &= (x^2 + 2x) \sin(x) + (2x + 2) \cos(x) - 2 \end{aligned}$$

La fonction F est une primitive de $(x \mapsto (x^2 + 2x + 2) \cos(x))$.

Les primitives de $(x \mapsto (x^2 + 2x + 2) \cos(x))$ sont les fonctions d'expressions : $(x^2 + 2x) \sin(x) + (2x + 2) \cos(x) + C$ où $C \in \mathbb{R}$.