Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°7
Rendu le 16 novembre 2011

Résolution de trois équations différentielles
Exercice n°8 (19,20,22) - feuille 4

---

1 Énoncé

Exercice 8. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

19. $y'' - 3y' + 2y = x + 1 + \mathrm{e}^x$
20. $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{ch}(x)\cos(x)$
22. $y'' - 2y' + 2y = (2 + 4x)\mathrm{e}^x \sin(x)$

2 Résolution

19. On résout l'équation :

$$y'' - 3y' + 2y = x + 1 + \mathrm{e}^x \qquad (E)$$

L'équation homogène associée à (E) est :

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (E_0)$$

Son polynôme caractéristique est : $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$. Ses racines sont donc : 1 et 2.
La solution générale de l'équation (E_0) est :

$$\lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x} \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière de (E). Pour cela, on cherche une solution particulière des équations suivantes :

$$y'' - 3y' + 2y = x + 1 \qquad (E_1)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x \qquad (E_2)$$

(a) On cherche une solution particulère de (E_1) sous la forme : $f(x) = ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On a : $f'(x) = a$ et $f''(x) = 0$.
Donc : $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 2ax + (2b - 3a)$.
Ainsi, f est solution de (E_1) si, et seulement si : $\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 3a = 1 \end{cases} \qquad (S)$

Or : $(S) \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1 + 3a}{2} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$
Une solution particulière de (E_1) est donc : $\dfrac{2x + 5}{4}$.

(b) On a : $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{1.x}$ et 1 est une racine simple du polynôme caractéristique de (E_0).
On cherche donc une solution de (E_2) sous la forme : $g(x) = ax\mathrm{e}^x$ où $a \in \mathbb{R}$.
On a alors : $g'(x) = a(x + 1)\mathrm{e}^x$ et $g''(x) = a(x + 2)\mathrm{e}^x$.
Donc : $g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = -a\mathrm{e}^x$.
Ainsi, g est solution de (E_2) si, et seulement si : $-a = 1$.
Une solution particulière de (E_2) est donc : $-x\mathrm{e}^x$.

Par le principe de superposition, une solution particulière de (E) est $\dfrac{2x + 5}{4} - x\mathrm{e}^x$.

> La solution générale de (E) est donc :
>
> $$\lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{2x} + \frac{2x + 5}{4} - x\mathrm{e}^x$$
>
> où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

20. On résout l'équation :

$$y'' - 2y' + 2y = \mathrm{ch}(x)\cos(x) \qquad (E)$$

L'équation homogène associée à (E) est :

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad (E_0)$$

Son polynôme caractéristique est : $X^2 - 2X + 2 = (X - 1)^2 + 1$
$= (X - 1 + \mathrm{i})(X - 1 - \mathrm{i})$.
Ses racines sont donc : $1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$.
La solution générale de l'équation (E_0) est :

$$(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))\mathrm{e}^x \text{ où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière de (E).
On a : $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\cos(x) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}) + \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x})\right)$.
On cherche donc une solution particulière complexe des équations suivantes :

$$y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} \qquad (E_1)$$

$$y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \qquad (E_2)$$

(a) $-1+\mathrm{i}$ n'est pas une racine de polynôme caractéristique de (E_0).
On cherche donc une solution de (E_1) sous la forme : $f(x) = a\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$ où $a \in \mathbb{C}$.
On a : $f'(x) = a(-1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$ et $f''(x) = -2ia\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$.
Donc : $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = (4-4\mathrm{i})a\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$.
Ainsi, f est une solution de (E_1) si, et seulement si, $(4-4\mathrm{i})a = 1$.
Or : $\dfrac{1}{4-4\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{8}$.
Une solution particulière de (E_1) est donc : $\dfrac{1+\mathrm{i}}{8}\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$.

(b) $1+\mathrm{i}$ est une racine simple du polynôme caractéristique de (E_0).
On cherche donc une solution de (E_2) sous la forme : $g(x) = ax\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ où $a \in \mathbb{C}$.
On a alors : $g'(x) = a((1+\mathrm{i})x+1)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ et $g''(x) = a(2\mathrm{i}x + 2 + 2\mathrm{i})\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.
Donc : $g''(x) - 2g'(x) + 2g(x) = 2\mathrm{i}a\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.
Ainsi, g est une solution de (E_2) si, et seulement si, $2\mathrm{i}a = 1$.
Donc, une solution particulière de (E_2) est donc : $-\dfrac{\mathrm{i}}{2}x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.

Par principe de superposition, une solution particulière de (E) est donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{8}\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(x)-\sin(x)}{8}\mathrm{e}^{-x} + x\frac{\sin(x)}{2}\mathrm{e}^{x}\right)\\ &= \frac{\cos(x)-\sin(x)}{16}\mathrm{e}^{-x} + x\frac{\sin(x)}{4}\mathrm{e}^{x}\end{aligned}$$

La solution générale de (E) est donc :

$$\frac{\cos(x)-\sin(x)}{16}\mathrm{e}^{-x} + \left(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + x\frac{\sin(x)}{4}\right)\mathrm{e}^{x}$$

où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

22. On résout l'équation :

$$y'' - 2y' + 2y = (2+4x)\mathrm{e}^{x}\sin(x)$$

L'équation homogène associée à (E) est :

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad (E_0)$$

Son polynôme caractéristique est : $\begin{aligned}[t] X^2 - 2X + 2 &= (X-1)^2 + 1\\ &= (X-1+\mathrm{i})(X-1-\mathrm{i}).\end{aligned}$

Ses racines sont donc : $1+\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.
La solution générale de l'équation (E_0) est :

$$(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))\mathrm{e}^{x} \text{ où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière de (E).
On a : $(2+4x)\mathrm{e}^{x}\sin(x) = \mathrm{Im}((2+4x)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x})$.
On cherche donc une solution particulière de l'équation :

$$y'' - 2y' + 2y = (2+4x)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} \qquad (E')$$

$1+\mathrm{i}$ est une racine du polynôme caractéristique de (E_0). On cherche donc une solution de (E') sous la forme : $f(x) = (ax^2+bx)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ où $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.
On a : $f'(x) = ((1+\mathrm{i})ax^2 + (2a + (1+\mathrm{i})b)x + b)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$
et : $f''(x) = (2\mathrm{i}ax^2 + (4(1+\mathrm{i})a + 2\mathrm{i}b)x + 2a + 2(1+\mathrm{i})b)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.
Donc : $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = (4\mathrm{i}ax + 2a + 2\mathrm{i}b)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.
Ainsi, f est solution de (E') si, et seulement si, $\begin{cases} 4\mathrm{i}a = 4\\ 2a + 2\mathrm{i}b = 2\end{cases} \qquad (S)$

Or : $(S) \iff \begin{cases} a = -\mathrm{i}\\ b = \dfrac{1-a}{\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = 1-\mathrm{i}\end{cases}$.

Une solution particulière de (E') est donc : $(-\mathrm{i}x^2 + (1-\mathrm{i})x)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$.
Par conséquent, une solution particulière de (E) est :
$\mathrm{Im}((-\mathrm{i}x^2 + (1-\mathrm{i})x)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}) = (-x^2\cos(x) + x(\sin(x) - \cos(x)))\mathrm{e}^{x}$.

On en déduit que la solution générale de (E) est :

$$((\lambda - x^2 - x)\cos(x) + (\mu + x)\sin(x))\mathrm{e}^{x}$$

où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.