Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°8
Rendu le 23 novembre 2011

Équation polaire d'une cercle - Résolution d'une équation géométrique
Exercice n°14 et n°17 - feuille 5

1 Énoncé

Exercice 14. *Équation polaire d'un cercle*
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R dont le centre Ω admet pour coordonnées polaires $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner une équation polaire de $\mathcal{C}$.
2. On suppose de plus que $\mathcal{C}$ passe par l'origine.
   (a) Simplifier l'équation polaire de $\mathcal{C}$.
   (b) En déduire une expression en fonction des coordonnées cartésiennes de Ω.

Exercice 17. *Soient ABC un triangle et G le centre de gravité de ABC.*
Déterminer, à l'aide de G, l'ensemble des points M tels que :
$MA^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

2 Résolution

2.1 Exercice 14

1. Les coordonnées cartésienne de Ω sont : $\Omega(r_0\cos(\theta_0), r_0\sin(\theta_0))$.
   Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est donc :

$$(x - r_0\cos(\theta_0))^2 + (y - r_0\sin(\theta_0))^2 - R^2 \qquad (E_c)$$

On a : $(E_c) \iff x^2 + y^2 - 2r_0\cos(\theta_0)x - 2r_0\sin(\theta_0)y + r_0^2 - R^2 = 0$.
Or : $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$.
En particulier : $x^2 + y^2 = r^2$.
Donc : $(E_c) \iff r^2 - 2r_0r(\cos(\theta_0)\cos(\theta) + \sin(\theta_0)\sin(\theta)) + r_0^2 - R^2 = 0$
$\iff r^2 - 2r_0r\cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 - R^2 = 0$

Une équation polaire de $\mathcal{C}$ est donc :

$$r^2 - 2r_0r\cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 - R^2 = 0 \qquad (E_p)$$

2. (a) On suppose que $\mathcal{C}$ passe par l'origine.
   Ainsi, $|r_0| = R$.
   D'où : $r_0^2 = R^2$.
   Donc : $(E) \iff r^2 - 2r_0r\cos(\theta - \theta_0) = 0$
   $\iff r = 0$ ou $r - 2r_0\cos(\theta - \theta_0) = 0$
   $\iff r = 0$ ou $r = 2r_0\cos(\theta - \theta_0)$
   Or, l'origine est la seule solution de l'équation $r = 0$.
   De plus, si $\theta = \theta_0 + \dfrac{\pi}{2}$, $2r_0\cos(\theta - \theta_0) = 0$.
   L'orgine admet pour coordonnées polaire $(0, \theta_0 + \dfrac{\pi}{2})$. Elle est donc solution de la deuxième équation.

   Une équation polaire du cercle $\mathcal{C}$ est donc :

$$r = 2r_0\cos(\theta - \theta_0) \qquad (E'_p)$$

   (b) On note (x_0, y_0) les coordonnées cartésiennes de Ω.
   On a : $\begin{cases} x_0 = r_0\cos(\theta_0) \\ y_0 = r_0\sin(\theta_0) \end{cases}$
   Donc : $(E'_p) \iff r = 2r_0\cos(\theta_0)\cos(\theta) + 2r_0\sin(\theta_0)\sin(\theta)$.

   Une équation polaire de $\mathcal{C}$ est donc :

$$r = 2x_0\cos(\theta) + 2y_0\sin(\theta)$$

3 Exercice 17

On résout : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2 \qquad (E)$.

On a : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$
$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2$
$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

et : $AB^2 + AC^2 + BC^2 = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC})^2$
$= 2(AG^2 + GB^2 + GC^2 + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GC})$
$= 2(AG^2 + GB^2 + GC^2) + \overrightarrow{AG}.(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{BG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC})$
$+ \overrightarrow{CG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$
$= 2(AG^2 + GB^2 + GC^2) + AG^2 + BG^2 + CG^2 \qquad (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}, .$
$= 3GA^2 + 3GB^2 + 3GC^2$

Donc : $(E) \iff 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3GA^2 + 3GB^2 + 3GC^2.$

$$\iff MG^2 = \frac{2}{3}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

L'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{GA^2 + GB^2 + GC^2}$.