Étude d'une courbe
Exercice n°2 (8) - feuille 6

1 Énoncé

Exercice 14. *Étudier les courbes de paramètre t suivantes :*

8. $\begin{cases} x(t) = \sin(t) + \sqrt{3}\cos(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

2 Résolution

Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Les fonctions } x \text{ et } y \text{ sont donc définies sur } \mathbb{R}.}$

On a : $\forall t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x(t+\pi) = \sin(t+\pi) + \sqrt{3}\cos(t+\pi) = -\sin(t) - \sqrt{3}\cos(t) = -x(t) \\ y(t+\pi) = \sin(2(t+\pi)) = \sin(2t+2\pi) = \sin(2t) = y(t) \end{cases}$

$\boxed{\text{On réduit donc l'étude à } [0,\pi] \text{ et on retrouve le reste de la courbe par la symétrie d'axe } (Oy).}$

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Les fonctions x et y sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$.

De plus : $x'(t) = \cos(t) - \sqrt{3}\sin(t)$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\cos(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(t) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(t)\right)$$

$$= 2\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$$

et : $y'(t) = 2\cos(2t)$.

On suppose $t \in [0,\pi]$.

Donc : $t + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

D'où : $x'(t) \geq 0 \iff t + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \iff t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

De plus : $2t \in [0, 2\pi]$.

Donc : $y'(t) \geq 0 \iff 2t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \iff t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x'(t)$	1	+	0	−	−	−	−	−	-1
$x(t)$	$\sqrt{3}$	↗	2	↘	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$	↘	$-\sqrt{3}$
$y'(t)$	2	+	+	+	0	−	0	+	2
$y(t)$	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	-1	↗	0

Il n'y a ni point stationnaire, ni branche infinie, ni point limite.
On en déduit la courbe suivante :