Lycée Gustave Eiffel — Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 — Exercice hebdomadaire n°10
Rendu le 7 décembre 2011

Étude d'une courbe polaire

1 Énoncé

Étudier la courbes Γ d'équation polaire :

$$r = \rho(\theta) = \frac{2\cos(\theta)}{2\sin(\theta)+\sqrt{2}}$$

On placera les points de paramètres $\theta = k\frac{\pi}{4}$ où $k \in \mathbb{Z}$ avec un vecteur tangent.

2 Résolution

Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$.

De plus :
$$\begin{aligned} 2\sin(\theta)+\sqrt{2}=0 &\iff \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \sin(\theta) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &\iff \theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } \theta = \pi + \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ &\iff \theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{4}[2\pi] \end{aligned}$$

> La fonction ρ est donc définie sur :
> $$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi[\cup]\frac{5\pi}{4}+2k\pi, \frac{7\pi}{4}+2k\pi[$$

On a : $\rho(\theta+2\pi) = \dfrac{2\cos(\theta+2\pi)}{2\sin(\theta+2\pi)+\sqrt{2}} = \dfrac{2\cos(\theta)}{2\sin(\theta)+\sqrt{2}} = \rho(\theta)$.

> On réduit l'étude à $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}[\cup]-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[\cup]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$. On obtient toute la courbe sur cet intervalle.

On a : $\rho(\pi-\theta) = \dfrac{2\cos(\pi-\theta)}{2\sin(\pi-\theta)+\sqrt{2}} = -\dfrac{2\cos(\theta)}{2\sin(\theta)+\sqrt{2}} = -\rho(\theta)$.

> On réduit l'étude à $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}[\cup]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. On retrouve le reste de la courbe par la symétrie d'axe (Ox).

La fonction ρ est une fraction de fonctions dérivables. Elle est donc dérivable.

De plus : $\rho'(\theta) = \dfrac{-2\sin(\theta)(2\sin(\theta)+\sqrt{2}) - 4\cos^2(\theta)}{(2\sin(\theta)+\sqrt{2})^2} = -\dfrac{4+2\sqrt{2}\sin(\theta)}{(2\sin(\theta)+\sqrt{2})^2}$.

Donc, $\rho'(\theta)$ est du signe opposé à celui de $4+2\sqrt{2}\sin(\theta)$.

Or : $\sin(\theta) \geq -1$.

D'où : $4+2\sqrt{2}\sin(\theta) \geq 4-2\sqrt{2} > 0$.

On en déduit que : $\rho'(\theta) < 0$.

Déterminons les limites de ρ.

La fonction sin est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Or, sur cet intervalle : $2\sin(\theta)+\sqrt{2} = 0 \iff \theta = -\frac{\pi}{4}$.

Ainsi, $\forall\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}[\quad 2\sin(\theta)+\sqrt{2} < 0$.

et : $\forall\theta \in]-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}] \quad 2\sin(\theta)+\sqrt{2} > 0$.

Or : $\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{4}} 2\sin(\theta)+\sqrt{2} = 0$ et $\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{4}} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'où : $\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{4}^-} \rho(\theta) = -\infty$ et : $\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{4}^+} \rho(\theta) = +\infty$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

θ	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\rho'(\theta)$	$-2-\sqrt{2}$	$-$	||	$-$	-2	$-$	$-\frac{3}{4}$	$-$	$-2+\sqrt{2}$
$\rho(\theta)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

La fonction cos est positive sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et s'annule uniquement en $\frac{\pi}{2}$ et en $-\frac{\pi}{2}$.

En dehors de ces paramètres, $\rho(\theta)$ est du même signe que $2\sin(\theta)+\sqrt{2}$ dont nous avons déja étudié le signe.

On en déduit le tableau de signe suivant :

θ	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\rho(\theta)$	0	$-$	||	$+$	0

Remarque 2.1. *On peut également invoquer les variations de ρ pour l'étude du signe de ρ.*

La fonction ρ s'annule en $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

La fonction cos s'annule en changeant de signe en $\dfrac{\pi}{2}$.

De plus, la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$. Donc, $2\sin(\theta) + \sqrt{2}$ est strictement positif au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$.

La fonction ρ s'annule donc en $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ en changeant de signe.

$$\boxed{\text{La courbe } \Gamma \text{ admet un point ordinaire en } \theta = \frac{\pi}{2}.}$$

La fonction ρ s'annule également en $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$.

La fonction cos s'annule en changeant de signe en $-\dfrac{\pi}{2}$. De plus, la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $-\dfrac{\pi}{2}$. Donc, $2\sin(\theta) + \sqrt{2}$ est strictement positif au voisinage de $-\dfrac{\pi}{2}$.

La fonction ρ s'annule donc en $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ en changeant de signe.

$$\boxed{\text{La courbe } \Gamma \text{ admet un point ordinaire en } \theta = -\frac{\pi}{2}.}$$

D'après les limites de ρ, on en déduit que la courbe Γ admet une branche infinie en $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

On note x et y les fonctions coordonnées associée à l'équation polaire de Γ.

On a : $\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$

Donc : $\dfrac{y(\theta)}{x(\theta)} = \tan(\theta)$.

D'où : $\displaystyle\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{4}} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = -1$.

On a : $x(\theta) + y(\theta) = \dfrac{2\cos(\theta)(\cos(\theta) + \sin(\theta))}{2\sin(\theta) + \sqrt{2}} = \dfrac{2\cos(\theta)\frac{\cos(\theta)+\sin(\theta)}{\theta+\frac{\pi}{4}}}{\frac{2\sin(\theta)+\sqrt{2}}{\theta+\frac{\pi}{4}}}$.

Or : $\displaystyle\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{\theta + \frac{\pi}{4}} = \cos'(-\frac{\pi}{4}) + \sin'(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(-\frac{\pi}{4}) + \cos(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

$\displaystyle\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin(\theta) + \sqrt{2}}{\theta + \frac{\pi}{4}} = 2\sin'(-\frac{\pi}{4}) = 2\cos(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

et : $\displaystyle\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{4}} 2\cos(\theta) = \sqrt{2}$.

D'où : $\displaystyle\lim_{\theta \to -\frac{\pi}{4}} x(\theta) + y(\theta) = \sqrt{2}$

$$\boxed{\text{On en déduit que la courbe } \Gamma \text{ admet une asymptote d'équation } y = -x + \sqrt{2} \text{ en } \theta = -\frac{\pi}{4}.}$$