

Calcul de limites - Équivalents

1 Énoncé

Exercice 6. Déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$10. f(x) = \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{\exp(x^2) - 1}$$

$$16. f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos(2x)}$$

Exercice 10. Calculer, si elle existe, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dans les cas suivants :

$$10. f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)}, a = 1$$

$$13. f(x) = (\ln(x))^{\tan(\frac{\pi x}{2e})}, a = e$$

2 Résolution

3 Exercice 6

$$10. \text{ On a : } f(x) = \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{\exp(x^2) - 1}.$$

$$\text{Or : } e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

$$\text{D'où, par composition à droite : } \exp(x^2) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2.$$

$$\text{D'autre part, on a : } \sqrt{\cos(x)} - 1 = (1 + (\cos(x) - 1))^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Or : } (1 + u)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) - 1 = 0.$$

$$\text{D'où, par composition à droite : } \sqrt{\cos(x)} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cos(x) - 1}{2}.$$

$$\text{Or : } 1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Donc : } \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

$$\text{D'où : } \sqrt{\cos(x)} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{4}.$$

$$\text{Par conséquent, } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{4}}{x^2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{On en déduit que : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - 1}{\exp(x^2) - 1} = -\frac{1}{4}$$

$$16. \text{ On a : } f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos(2x)}.$$

$$\text{Or : } 1 - \cos(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^2}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0.$$

$$\text{Donc, par composition à droite : } 1 - \cos(2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2.$$

$$\text{D'autre part, on a : } \ln(\cos(x)) = \ln(1 + (\cos(x) - 1)).$$

$$\text{Or : } \ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) - 1 = 0.$$

$$\text{D'où, par composition à droite : } \ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos(x) - 1.$$

$$\text{Or : } 1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Donc : } \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

$$\text{D'où : } \ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Par conséquent : } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{2x^2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{On en déduit que : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos(2x)} = -\frac{1}{4}$$

4 Exercice 10

$$10. \text{ On a : } f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)} \text{ et } a = 1.$$

$$\text{On a : } \sin(\pi x) = -\sin(\pi x - \pi) = -\sin(\pi(x - 1)).$$

$$\text{Or : } \sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \pi(x - 1) = 0.$$

$$\text{Donc, par composition à droite : } \sin(\pi(x - 1)) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \pi(x - 1) \text{ et : } \sin(\pi x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\pi(x - 1).$$

$$\text{D'autre part, on a : } \ln(x) = \ln(1 + (x - 1)).$$

$$\text{Or : } \ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0.$$

$$\text{Donc, par composition à droite : } \ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1.$$

$$\text{D'où : } f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{-\pi(x - 1)}{x - 1} = -\pi.$$

On en déduit que : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x)} = -\pi}$

13. On a : $f(x) = (\ln(x))^{\tan(\frac{\pi x}{2e})}$ et : $a = e$.

On a : $f(x) = \exp\left(\tan\left(\frac{\pi x}{2e}\right) \ln(\ln(x))\right)$.

On calcule d'abord la limite de $\tan\left(\frac{\pi x}{2e}\right) \ln(\ln(x))$ en e .

On a : $\tan\left(\frac{\pi x}{2e}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2e}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2e}\right)}$.

Or : $\lim_{x \rightarrow e} \sin\left(\frac{\pi x}{2e}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$.

Donc : $\sin\left(\frac{\pi x}{2e}\right) \underset{x \rightarrow e}{\sim} 1$.

On a : $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\pi x}{2e} = \frac{\pi}{2}$.

Or : $\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0$.

Donc : $\cos(x) = \cos(x) - \frac{\pi}{2} \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Par composition à droite, on a : $\cos\left(\frac{\pi x}{2e}\right) \underset{x \rightarrow e}{\sim} -\left(\frac{\pi x}{2e} - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2e}(x - e)$.

D'où : $\tan\left(\frac{\pi x}{2e}\right) \underset{x \rightarrow e}{\sim} \frac{1}{-\frac{\pi}{2e}(x - e)} = -\frac{2e}{\pi(x - e)}$.

Remarque 4.1. On pouvait également utilisé la formule : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$\frac{1}{\tan(x)}$ puis utiliser : $\tan(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.

D'autre part, on a : $\ln(\ln(x)) = \ln(1 + (\ln(x) - 1))$.

Or : $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et $\lim_{x \rightarrow e} \ln(x) - 1 = 0$.

Donc, par composition à droite : $\ln(\ln(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x) - 1$.

Or : $\ln(x) - 1 = \ln\left(\frac{x}{e}\right) = \ln\left(1 + \frac{x - e}{e}\right)$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x - e}{e} = 0$, on obtient par composition à droite : $\ln(\ln(x)) \underset{x \rightarrow e}{\sim} \frac{x - e}{e}$.

Par conséquent : $\tan\left(\frac{\pi x}{2e}\right) \ln(\ln(x)) \underset{x \rightarrow e}{\sim} -\frac{2e}{\pi(x - e)} \cdot \frac{x - e}{e} = -\frac{2}{\pi}$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow e} \tan\left(\frac{\pi x}{2e}\right) \ln(\ln(x)) = -\frac{2}{\pi}$.

On en déduit que : $\boxed{\lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} (\ln(x))^{\tan(\frac{\pi x}{2e})} = e^{-\frac{2}{\pi}}}$