Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°13
Rendu le 11 janvier 2012

Théorie des ensembles

---

1 Énoncé

Exercice 8. *Un problème concret*

Dans une grande librairie, trois employés ont les attributions suivantes :
- Jean s'occupe des livres politiques et des romans étrangers reliés.
- Pierre s'occupe des livres politiques reliés et des romans anglais, sauf ceux qui sont politiques.
- Henri s'occupe des livres anglais et des romans politiques non reliés.

Quels sont les livres qui sont de la compétence des trois employés ? de deux ? d'aucun ? Mettre le problème sous forme mathématique à l'aide d'ensemble bien choisie.

Exercice 14. *Application injective*

Soit f une application de E dans F. Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes parties A_1 et A_2 de E, $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

2 Résolution

2.1 Exercice 8

Soit L l'ensemble des livres de la librairie.
Soient les sous-ensembles de L suivants :
- R_o : l'ensemble des romans
- P : l'ensemble des livres politiques
- E : l'ensemble des livres étrangers
- A : l'ensemble des livres anglais
- R_l : l'ensemble des livres reliés
- L_J : l'ensemble des livres dont s'occupe Jean
- L_P : l'ensemble des livres dont s'occupe Pierre
- L_H : l'ensemble des livres dont s'occupe Henri

Par hypotèses, on a :
- $A \subset E$
- $L_J = P \cup (R_o \cap E \cap R_l)$
- $L_P = (P \cap R_l) \cup (R_o \cap A \cap \complement_L P)$
- $L_H = A \cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l)$

1. Déterminons l'ensemble des livres dont s'occupent les trois employés.
Cette ensemble est $R_3 = L_J \cap L_P \cap L_H$.
On calcule d'abord : $L_J \cap L_P$.
On a : $L_J \cap L_P = \big(P \cup (R_o \cap E \cap R_l)\big) \cap \big((P \cap R_l) \cup (R_o \cap A \cap \complement_L P)\big)$
$= (P \cap R_l) \cup (R_o \cap E \cap R_l \cap P) \cup (R_o \cap A \cap \complement_L P \cap R_l)$
Or : $R_o \cap E \cap R_l \cap P \subset P \cap R_l$ et $R_o \cap A \cap P \cap R_l \subset P \cap R_l$.
Donc : $L_J \cap L_P = (P \cap R_l) \cup (R_o \cap A \cap P \cap R_l) \cup (R_o \cap A \cap \complement_L P \cap R_l)$
$= (P \cap R_l) \cup \big(R_o \cap A \cap R_l \cap (P \cup \complement_L P)\big)$
$= (P \cap R_l) \cup (R_o \cap A \cap R_l)$
D'où : $R_3 = \big((P \cap R_l) \cup (R_o \cap A \cap R_l)\big) \cap \big(A \cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l)\big)$
$= (P \cap R_l \cap A) \cup (R_o \cap A \cap R_l)$
Donc : $\boxed{R_3 = A \cap R_l \cap (P \cup R_o)}$

Les livres qui sont de la compétence des trois employés sont les livres anglais reliés qui sont politiques ou qui sont des romans.

2. Déterminons l'ensemble des livres dont s'occupent deux employés.
On a : $L_J \cap L_H = \big(P \cup (R_o \cap E \cap R_l)\big) \cap \big(A \cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l)\big)$
$= (P \cap A) \cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l) \cup (R_o \cap A \cap R_l)$
et : $L_P \cap L_H = \big((P \cap R_l) \cup (R_o \cap A \cap \complement_L P)\big) \cap \big(A \cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l)\big)$
$= (P \cap R_l \cap A) \cup (R_o \cap A \cap \complement_L P)$
On note R_2 l'ensemble des livres qui sont de la compétence d'au moins deux employés.
On a : $R_2 = (L_J \cap L_P) \cup (L_J \cap L_H) \cup (L_P \cap L_H)$
$= (P \cap R_l) \cup (R_o \cap A \cap R_l) \cup (P \cap A) \cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l)$
$\cup (P \cap R_l \cap A) \cup (R_o \cap A \cap \complement_L P)$
$= (P \cap R_l) \cup (R_o \cap A \cap R_l) \cup (P \cap A) \cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l)$
$\cup (R_o \cap A \cap \complement_L P)$
On note R_2' l'esnsemble des livres qui sont de la responsabilité d'exactement deux employés.
On a : $R_2' = R_2 \setminus R_3 = R_2 \cap \complement_L R_3$.
Or : $\complement_L R_3 = \complement_L \big(A \cap R_l \cap (P \cup R_o)\big)$
$= \complement_L A \cup \complement_L R_L \cup (\complement_L P \cap \complement_L R_o)$
Donc : $R_2' = \big((P \cap R_l) \cup (R_o \cap A \cap R_l) \cup (P \cap A) \cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l)$
$\cup (R_o \cap A \cap \complement_L P)\big) \cap \big(\complement_L A \cup \complement_L R_l \cup (\complement_L P \cap \complement_L R_o)\big)$
$= (P \cap R_l \cap \complement_L A) \cup (P \cap A \cap \complement_L R_l)$
$\cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l \cap \complement_L A) \cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l)$
$= (P \cap R_l \cap \complement_L A) \cup (P \cap A \cap \complement_L R_l) \cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l)$

D'où : $\boxed{R'_2 = P \cap \big((R_l \cap \complement_L A) \cup (A \cap \complement_L R_l) \cup (R_o \cap \complement_L R_l)\big)}$

> Les livres qui sont de la compétence de deux employés sont les livres politiques qui sont anglais et reliés ou relié et non anglais ou des romans non reliés.

3. Déterminons l'ensemble des livres dont s'occupent aucun employé.
On note R_0 cet ensemble.
On a : $R_0 = \complement_L(L_J \cup L_P \cup L_H)$.
Or :
$$\begin{aligned} L_J \cup L_P \cup L_H &= P \cup (R_o \cap E \cap R_l) \cup (P \cap R_l) \cup (R_o \cap A \cap \complement_L P) \\ &\quad \cup A \cup (R_o \cap P \cap \complement_L R_l) \\ &= P \cup (R_o \cap E \cap R_l) \cup A \end{aligned}$$
D'où :
$$\begin{aligned} R_0 &= \complement_L P \cap \complement_L(R_o \cap E \cap R_l) \cap \complement_L A \\ &= \complement_L P \cap (\complement_L R_o \cup \complement_L E \cup \complement_L R_l) \cap \complement_L A \\ &= \complement_L P \cap (\complement_L R_o \cap \complement_L A \cup \complement_L E \cap \complement_L A \cup \complement_L R_l \cap \complement_L A) \\ &= \complement_L P \cap \big((\complement_L R_o \cap \complement_L A) \cup (\complement_L E \cap \complement_L A) \cup (\complement_L R_l \cap \complement_L A)\big) \end{aligned}$$
Donc : $\boxed{R_0 = \complement_L P \cap \big((\complement_L R_o \cap \complement_L A) \cup \complement_L E \cup (\complement_L R_l \cap \complement_L A)\big)}$

> Les livres qui ne sont de la responsabilité d'aucun employé sont les livres non politiques qui ne sont pas des romans et pas anglais ou qui ne sont pas étrangers ou qui ne sont pas reliés et pas anglais.

2.2 Exercice 14

On raisonne par double implication :

$\Longrightarrow$: On suppose que f est injective.
Soient A_1 et A_2 deux parties de E.
Montrons que $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
D'après le cours, on a : $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
Montrons que $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$.
Soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.
Puisque $y \in f(A_1)$, il existe $x_1 \in A_1$ tel que : $y = f(x)$.
Puisque $y \in f(A_2)$, il existe $x_2 \in A_2$ tel que : $y = f(x)$.
Ainsi, on a : $y = f(x_1) = f(x_2)$.
Or, f est injective.
Donc : $x_1 = x_2$.
Ainsi, $x_1 \in A_2$ et donc $x_1 \in A_1 \cap A_2$.
Puisque $y = f(x_1)$, on en déduit que $y \in f(A_1 \cap A_2)$.
D'où : $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$.
et donc : $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
On en déduit que, si f est injective, alors pour toutes parties A_1 et A_2 de E, on a : $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

$\Longleftarrow$: On suppose que pour toutes parties A_1 et A_2 de E, on a : $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
Montrons que f est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
Montrons que $x_1 = x_2$.
On pose $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$.
On a : $f(A_1) = \{f(x_1)\}$
et $f(A_2) = \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\}$ puisque $f(x_1) = f(x_2)$.
D'où : $f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \emptyset$.
Or : $f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$.
Ainsi, $f(A_1 \cap A_2) \neq \emptyset$.
D'où $A_1 \cap A_2 = \{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \emptyset$.
et donc : $x_1 = x_2$.
On en déduit que, si pour toutes parties A_1 et A_2 de E, on a : $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, alors f est injective.

> Ainsi, f est injective, si, et seulement si, pour toutes parties A_1 et A_2 de E, on a : $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.