Sommes
Feuille 9 : Exercice 3(2) - Exercice 4

1 Énoncé

Exercice 3. *Applications de l'exercice 2*

On se propose d'utiliser l'exercice 2 pour calculer des sommes.

2. (a) Déterminer a, b et c tels que : $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

   (b) En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 4. *Autres applications de l'exercice 2*

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On note : $S_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$.

1. Rappeler les expressions de S_0 et de S_1 en fonction de n.
2. Montrer, par récurrence sur n, que : $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. (a) Calculer de deux manières différentes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3$.

   (b) Retrouver l'expression de S_2 précédente.
4. En s'inspirant de la question précédente, calculer S_3.

2 Résolution

2.1 Exercice 3 (2)

2. (a) Déterminons a, b et c tels que : $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

On a :
$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$

Puisque deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients, on en déduit que :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ 2a+b=0 \quad (L_2 - L_1) \\ c = -a-b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}. \quad i.e.\ (a,b,c) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)}$$

(b) On a donc :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)} - \left(\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+2)}\right)$$

On reconnait donc une somme télescopique.

D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}\right)$

On en déduit : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}}$

2.2 Exercice 4

1. On a : $S_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^0 = \sum_{k=0}^{n} 1$.

   Donc : $\boxed{S_0 = n+1}$

   On a : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^1 = \sum_{k=0}^{n} k$.

   On reconnait une somme de terme d'une suite arithmétique.

   Donc : $\boxed{S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

2. Montrons, par récurrence sur n, que : $S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation : On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$.

et : $\dfrac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6} = 0$.

La propriété est donc vraie pour $n=0$.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On a alors :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2\\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\
&= \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } n\in\mathbb{N},\ S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

3. (a) 1ère **méthode :** On reconnait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - k^3$ est une somme télescopique. Donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3 = (n+1)^3 - 0^3$.

   D'où : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3 = (n+1)^3}$

   2ème **méthode :** On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3 &= \sum_{k=0}^{n}(k^3+3k^2+3k+1)-k^3\\
&= \sum_{k=0}^{n} 3k^2+3k+1\\
&= 3\sum_{k=0}^{n}k^2 + 3\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1\end{aligned}$$

   Donc : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-k^3 = 3S_2+3S_1+S_0}$

   (b) Ainsi, nous avons : $3S_2+3S_1+S_0 = (n+1)^3$

   Donc :
$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{(n+1)^3-3S_1-S_0}{3} = \frac{(n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)}{3}\\
&= \frac{(n+1)(2(n+1)^2-3n-2)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6}\end{aligned}$$

   D'où : $\boxed{S_2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

4. On calcule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4$ de deux façons différentes.

   1ère **méthode :**

   On reconnait une somme télescopique.

   On a donc : $\underline{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4 = (n+1)^4}$

   2ème **méthode :**

   On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^4-k^4 &= \sum_{k=0}^{n}(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)-k^4 = \sum_{k=0}^{n}4k^3+6k^2+4k+1\\
&= \underline{4S_3+6S_2+4S_1+S_0}\end{aligned}$$

   On obtient ainsi : $4S_3+6S_2+4S_1+S_0 = (n+1)^4$

   Donc :
$$\begin{aligned}S_3 &= \frac{(n+1)^4-6S_2-4S_1-S_0}{4}\\
&= \frac{(n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)}{4}\\
&= \frac{(n+1)\big((n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\big)}{4}\\
&= \frac{(n+1)\big((n+1)^3-(n+1)(2n+1)\big)}{4}\\
&= \frac{(n+1)^2\big((n+1)^2-(2n+1)\big)}{4}\end{aligned}$$

   D'où : $\boxed{S_3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$