Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°15
Rendu le 25 janvier 2012

Développements limités et applications
Feuille 10 : Exercice 10(5) - Exercice 12 - Exercice 14(2)

---

1 Énoncé

Exercice 10. *Déterminer les développements limités d'ordre n au point a des fonctions f suivantes :*

5. $f(x) = \tan(x)$, $a = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 2$

Exercice 12. *Étude de la fonction* $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ *en* 0

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable. Préciser la position relative de la tangente et du graphe de f au voisinage de 0.
2. Montrer que la fonction est alors deux fois dérivable.

Exercice 14. *Déterminer, si elle existe, une équation de l'asymptote de f(x) en* $+\infty$ *ainsi que la position relative du graphe de f au voisinage de* $+\infty$.

2. $f(x) = \sqrt[4]{x^4 + 4x^3 + 3}$
   On montrera qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\sqrt{x^4 + 4x^3 + 3} = ax + b + \dfrac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2 Résolution

2.1 Exercice 10 (2)

2. On pose : $u = x - \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi, $x = u + \dfrac{\pi}{4}$.

   On a : $\tan(x) = \tan\left(u + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan(u) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan(u)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}$.

   $$= \frac{1+\tan(u)}{1-\tan(u)} = (1+\tan(u))\frac{1}{1-\tan(u)}$$

   Or : $\dfrac{1}{1-v} = 1 + v + v^2 + \underset{v\to0}{\mathrm{o}}(v^2)$.

   On pose : $v = \tan(u) = u + \underset{u\to0}{\mathrm{o}}(u^2)$.

   On a : $v^2 = u^2 + \underset{u\to0}{\mathrm{o}}(u^2)$.

   Ainsi : $\dfrac{1}{1-\tan(u)} = 1 + u + u^2 + \underset{u\to0}{\mathrm{o}}(u^2)$.

   D'où :
   $$\begin{aligned}\frac{1+\tan(u)}{1-\tan(u)} &= (1 + u + \underset{u\to0}{\mathrm{o}}(u^2))(1 + u + u^2 + \underset{u\to0}{\mathrm{o}}(u^2)) \\ &= 1 + u \quad + u^2 + \underset{u\to0}{\mathrm{o}}(u^2) \\ &\qquad + u \quad + u^2 \\ &= 1 + 2u + 2u^2 + \underset{u\to0}{\mathrm{o}}(u^2)\end{aligned}$$

   Ainsi : $\boxed{\tan(x) = 1 + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\mathrm{o}}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2\right)}$

2.2 Exercice 12

La fonction f est définie sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

1. On a : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

   Or : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

   D'où : $\underline{f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2).}$

   Remarquons que $\dfrac{x^2}{3} \geqslant 0$.

La fonction f se prolonge donc par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ en une fonction dérivable telle que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. L'équation de la tangente de f est la droite d'équation $y = 1 - \dfrac{x}{2}$. Le graphe de f est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

2. Sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, la fonction f est une fraction de fonctions deux fois dérivables. La fonction f est donc dérivable sur cet ensemble.
   Il nous reste à montrer que f est dérivable deux fois en 0. Puisque f est dérivable en 0, il nous suffit de montrer que f' est dérivable en 0.

   Pour $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$.

   On a : $\dfrac{x}{1+x} = x\big(1 - x + x^2 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\big) = x - x^2 + x^3 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)$

   et : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

   D'où : $\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x^3}{3} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)$

Ainsi : $f'(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2x}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$.

La fonction f' est donc dérivable en 0 et $f''(0) = \dfrac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc dérivable deux fois sur }]-1,+\infty[.}$$

2.3 Exercice 14(2)

2. Puisque nous étudions f au voisinage de $+\infty$, on peut supposer $x > 0$.

On pose $u = \dfrac{1}{x}$. On a donc : $x = \dfrac{1}{u}$ et $u > 0$.

D'où :
$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{u^4} + \frac{4}{u^3} + 3} = \sqrt[4]{\frac{1}{u^4}}\sqrt[4]{1+4u+3u^4} \quad = \frac{1}{u}\sqrt[4]{1+4u+3u^4}$$

On a :
$$\sqrt[4]{1+v} = (1+v)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}v + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\frac{v^2}{2} + \underset{v\to 0}{\mathrm{o}}\left(v^2\right) = 1 + \frac{1}{4}v - \frac{3v^2}{32} + \underset{v\to 0}{\mathrm{o}}\left(v^2\right)$$

On pose : $v = 4u + 3u^4 = 4u + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}\left(u^2\right)$.

On a alors : $v^2 = 16u^2 + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}\left(u^2\right)$.

D'où : $\sqrt[4]{1+4u+3u^4} = 1 + u - \dfrac{3u^2}{2} + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}\left(u^2\right)$.

D'où :
$$f(x) = \frac{1}{u}\left(1 + u - \frac{3u^2}{2} + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}\left(u^2\right)\right) = \frac{1}{u} + 1 - \frac{3u}{2} + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(u) = x + 1 - \frac{3}{2x} + \underset{x\to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Remarquons que pour $x > 0$, on a : $-\dfrac{3}{2x} < 0$.

La fonction f admet donc une asymptote d'équation $y = x + 1$ en $+\infty$. De plus, le graphe de f est en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.