Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°16
Rendu le 1 février 2012

Étude d'une courbe
Feuille 10 : Exercice 17

1 Énoncé

Exercice 17. *Étude d'une courbe*

On considère Γ la courbe paramétrée par : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{(t+1)^2}{t+2} \\ y(t) = \dfrac{t(t^2+6t+7)}{t+2} \end{cases}$ pour $t \neq -2$.

1. Étudier les variations de x et y sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. La courbe Γ admet un unique point stationnaire en un paramètre $t = t_0$ que l'on précisera.
   Préciser la nature de ce point stationnaire en précisant un vecteur tangent à Γ en ce point.
3. (a) Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ admettent un développement asymptotique de la forme $\dfrac{a}{t+2} + b + c(t+2) + \underset{t\to -2}{\mathrm{o}}(t+2)$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) En déduire que Γ admet une asymptote en $t = -2$ et préciser la position relative de la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $t = -2$.
4. (a) Déterminer $(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $x(t) = a_1 t + b_1 + \dfrac{c_1}{t} + \dfrac{d_1}{t^2} + \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   (b) Déterminer $(a_2, b_2, c_2, d_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $y(t) = a_2 t^2 + b_2 t + c_2 + \dfrac{d_2}{t} + \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t}\right)$.
   (c) Déterminer alors $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty} y(t) - ax^2(t) - bx(t) - c = 0$.
   Ainsi, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole-asymptote de la courbe Γ en $+\infty$.
   (d) Préciser, en calculant un développement limité généralisé de $y(t) - ax^2(t) - bx(t) - c$, la position relative de Γ et de $\mathcal{P}$ au voisinage de $+\infty$.
5. Le développement limité généralisé de $y(t) - ax^2(t) - bx(t) - c$ est également valable en $-\infty$.
   Préciser la position relative de Γ et de $\mathcal{P}$ au voisinage de $-\infty$.
6. Tracer la courbe Γ.

2 Résolution

1. Les fonctions x et y sont des fractions de polynômes. Elles sont donc dérivables.
   On a : $x'(t) = \dfrac{2(t+1)(t+2) - (t+1)^2}{(t+2)^2} = \dfrac{(t+1)(t+3)}{(t+2)^2}$.
   et : $$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{(3t^2+12t+7)(t+2) - (t^3+6t^2+7t)}{(t+2)^2} \\ &= \frac{2t^3+12t^2+24t+14}{(t+2)^2} \\ &= \frac{2(t+1)(t^2+5t+7)}{(t+2)^2} \end{aligned}$$
   On a : $t^2+5t+7 = \left(t+\dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4} + 7 = \left(t+\dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$.
   On en déduit le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	$-$	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$y(t)$	$+\infty$	↘	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

   On a : $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t$. Donc : $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty} x(t) = +\infty$.
   On a : $y(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^2$. Donc : $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty} y(t) = +\infty$.
   On a : $x(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} t$. Donc : $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow-\infty} x(t) = -\infty$.
   On a : $y(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} t^2$. Donc : $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow-\infty} y(t) = +\infty$.
   On a : $x(t) \underset{t\to-2}{\sim} \dfrac{1}{t+2}$. Donc : $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow-2^-} x(t) = -\infty$ et : $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow-2^+} x(t) = +\infty$.
   On a : $y(t) \underset{t\to-2}{\sim} \dfrac{2}{t+2}$. Donc : $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow-2^-} y(t) = -\infty$ et : $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow-2^+} y(t) = +\infty$.
2. D'après son tableau de variations, la courbe Γ admet un unique point stationnaire en $t = -1$.
   On pose : $u = t+1$. On a donc : $t = u - 1$.

Ainsi : $x(t)=x(u-1)=\dfrac{u^2}{u+1} \quad = u^2(1-u+\underset{u\to 0}{o}(u))$

$= u^2-u^3+\underset{u\to 0}{o}(u^3)$

et : $y(t)=\dfrac{(u-1)\big((u-1)^2+6(u-1)+7\big)}{u+1}$

$=\dfrac{(u-1)(u^2+4u+2)}{u+1}$

$=\dfrac{u^3+3u^2-2(u+1)}{u+1}$

$=-2+(3u^2+u^3)(1-u+\underset{u\to 0}{o}(u))$

$=-2+3u^2-2u^3+\underset{u\to 0}{o}(u^3)$

D'où $\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}+(t+1)^2\underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}_{\vec{V}_2}+(t+1)^3\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}}_{\vec{V}_3}+\underset{t\to -1}{o}\left((t+1)^3\right)$.

Les vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ sont non colinéaires. Les entiers caractéristique sont p et q.

> La courbe Γ admet donc un point stationnaire en $t=-1$ de tangente de vecteur directeur $\vec{V}_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. De plus, le point de paramètre $t=-1$ est un rebroussement de première espèce.

3. (a) On pose $u=t+2$. On a donc : $t=u-2$

On a : $x(t)=\dfrac{(u-1)^2}{u}=\dfrac{1}{u}-2+u$.

Donc : $\boxed{x(t)=\dfrac{1}{t+2}-2+(t+2)+\underset{t\to -2}{o}(t+2)}$

On a : $y(t)=\dfrac{(u-2)\big((u-2)^2+6(u-2)+7\big)}{u}$

$=\dfrac{(u-2)(u^2+2u-1)}{u}$

$=\dfrac{2-5u+\underset{u\to 0}{o}(u^2)}{u}$

$=\dfrac{2}{u}-5+\underset{u\to 0}{o}(u)$

Donc : $\boxed{y(t)=\dfrac{2}{t+2}-5+\underset{t\to -2}{o}(t+2)}$

(b) D'après les limites de x et de y, la courbe Γ admet une branche infinie en -2.

De plus, on a : $y(t)-2x(t)=-1-2(t+2)+\underset{t\to -2}{o}(t+2)$.

On a donc : $\lim\limits_{t\longrightarrow -2} y(t)-(2x(t)-1)=0$ et $y(t)-(2x(t)-1)\underset{t\to -2}{\sim}-2(t+2)$.

> Ainsi, la courbe Γ admet une asymptote d'équation $y=2x-1$. La courbe Γ est au-dessus de son asymptote au voisinage de -2^- et en dessous au voisinage de -2^+.

4. (a) On a : $x(t)=\dfrac{(t+1)^2}{t+2}=\dfrac{t^2+2t+1}{t+2}=t+\dfrac{1}{t+2}$.

Or : $\dfrac{1}{t+2}=\dfrac{1}{t}\dfrac{1}{1+\frac{2}{t}}$. et $\dfrac{1}{1+u}=1-u+\underset{u\to 0}{o}(u)$.

Donc, pour $u=\dfrac{2}{t}$, on obtient : $\dfrac{1}{t+2}=\dfrac{1}{t}\left(1-\dfrac{2}{t}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$

$=\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t^2}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

D'où : $\boxed{x(t)=t+\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t^2}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)}$

(b) On a : $y(t)=\dfrac{t(t^2+6t+7)}{t+2}=\dfrac{t(t(t+2)+4(t+2)-1)}{t+2} \quad =t^2+4t-\dfrac{t}{t+2}$

$=t^2+4t-\dfrac{(t+2)-2}{t+2}$

$=t^2+4t-1+\dfrac{2}{t+2}$

D'où : $\boxed{y(t)=t^2+4t-1+\dfrac{2}{t}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)}$

(c) On a : $y(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}t^2$

et : $x(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}t$

On calcule : $y(t)-x(t)^2$.

On a : $x^2(t)=\left(t+\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t^2}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right)^2$

$=t^2+2-\dfrac{4}{t}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$

Donc : $y(t)-x^2(t)=4t-3+\dfrac{6}{t}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

D'où : $y(t)-x^2(t)-4x(t)=-3+\dfrac{2}{t}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Donc : $y(t)-x^2(t)-4x(t)+3=\dfrac{2}{t}+\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Ainsi, pour $a = 1$, $b = 4$ et $c = -3$, on a : $\lim_{t \longrightarrow +\infty} y(t) - ax^2(t) - bx(t) - c = 0$

Ainsi, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 + 4x - 3$ est une parabole-asymptote de la courbe Γ en $+\infty$.

(d) On a : $y(t) - x^2(t) - 4x(t) + 3 = \dfrac{2}{t} + \underset{t \to +\infty}{\mathrm{o}} \left(\dfrac{1}{t}\right)$

et $\dfrac{2}{t} > 0$ au voisinage de $+\infty$.

La courbe Γ est donc au-dessus de $\mathcal{P}$ au voisinage de $t = +\infty$.

5. Puisque nous admettons que le développement limité de $y(t) - ax^2(t) - bx(t) - c$ est également valable en $-\infty$ (*i.e.* que $y(t) - x^2(t) - 4x(t) + 3 = \dfrac{2}{t} + \underset{t \to -\infty}{\mathrm{o}} \left(\dfrac{1}{t}\right)$) et puisque $\dfrac{2}{t} < 0$ au voisinage de $-\infty$, nous pouvons déduire les faits suivants :

La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 + 4x - 3$ est une parabole-asymptote de la courbe Γ en $-\infty$.
La courbe Γ est en-dessous de $\mathcal{P}$ au voisinage de $t = -\infty$.

6. On déduit de notre étude le tracé suivant :