Bornes supérieure et inférieure - Limite d'une suite
Feuille 12 : Exercice 14 et Exercice 17

1 Énoncé

Exercice 14. *Bornes supérieure et inférieure versus opérations ensemblistes*

Soient A et B deux sous-ensembles bornés et non vides de $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $\sup(A \cup B)$ en fonction de $\sup(A)$ et $\sup(B)$.
2. Déterminer $\inf(A \cup B)$ en fonction de $\inf(A)$ et $\inf(B)$.
3. On suppose $A \cap B$ non vide.
   Montrer que $\max(\inf(A), \inf(B)) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$.
   Donner un exemple où il n'y a pas égalité.

Exercice 17. *Encore une suite avec des parties entières*

Soit x un nombre réel. Pour n entier naturel non nul on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}(kx)$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite

2 Résolution

2.1 Exercice 14

1. Montrons que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
   On pose $M = \max(\sup(A), \sup(B))$.

   Montrons tout d'abord que M est un majorant de $A \cup B$.
   Soit $x \in A \cup B$.
   Il y a deux cas.
   (a) $x \in A$:
       $\sup(A)$ est un majorant de A.
       Donc : $x \leq \sup(A)$.
       Par définition de M, on a : $\sup(A) \leq M$.
       On en déduit : $x \leq M$.
   (b) $x \in B$:
       Par symétrie des rôles de A et de B, on montre de même que : $x \leq M$.

   Dans tous les cas, $x \leq M$.
   M est donc un majorant de $A \cup B$.

   Montrons que M est le plus petit des majorants de $A \cup B$.
   Soit $M' < M$.
   Par symétrie des rôles de A et B, sans perte de généralités, on peut supposer que $M = \sup(A)$.
   Ainsi, il existe $x \in A$ tel que $x > M'$.
   On a alors : $x \in A \cup B$.
   Donc : M' n'est pas un majorant de $A \cup B$.
   Par conséquent, M est le plus petit des majorants.
   On en déduit que $\boxed{\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))}$.
2. Montrons que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
   On pose $m = \min(\inf(A), \inf(B))$.

   Montrons tout d'abord que m est un minorant de $A \cup B$.
   Soit $x \in A \cup B$.
   Il y a deux cas.
   (a) $x \in A$:
       $\inf(A)$ est un minorant de A.
       Donc : $x \geq \inf(A)$.
       Par définition de m, on a : $\inf(A) \geq m$.
       On en déduit : $x \geq m$.
   (b) $x \in B$:
       Par symétrie des rôles de A et de B, on montre de même que : $x \geq m$.

   Dans tous les cas, $x \geq m$.
   m est donc un minorant de $A \cup B$.

   Montrons que m est le plus grand des minorants de $A \cup B$.
   Soit $m' > m$.
   Par symétrie des rôles de A et B, sans perte de généralités, on peut supposer que $m = \inf(A)$.
   Ainsi, il existe $x \in A$ tel que $x > m'$.
   On a alors : $x \in A \cup B$.
   Donc : m' n'est pas un minorant de $A \cup B$.
   Par conséquent, m est le plus grand des minorants.
   On en déduit que $\boxed{\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))}$.
3. Montrons que
   $\max(\inf(A), \inf(B)) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$.
   Soit $x \in A \cap B$.
   On a : $x \in A$.

Donc : $\inf(A) \leq x \leq \sup(A)$.
On a : $x \in B$.
Donc : $\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$.
On obtient donc : $\max(\inf(A), \inf(B)) \leq x \leq \min(\sup(A), \sup(B))$.
On en déduit que $A \cap B$ est minoré par $\max(\inf(A), \inf(B))$ et majoré par $\min(\sup(A), \sup(B))$.
Donc : $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf(A), \inf(B))$
et : $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$.
On a également : $\inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B)$.
On en déduit :

$$\boxed{\max(\inf(A), \inf(B)) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))}$$

Donnons maintenant un exemple où il n'y a aucune égalité.
On prend : $A = \{1, 3, 4, 6\}$ et $B = \{2, 3, 4, 5\}$.
On a : $\inf(A) = 1$ et $\sup(A) = 6$.
Et : $\inf(B) = 2$ et $\sup(B) = 5$.
Donc : $\max(\inf(A), \inf(B)) = 2$ et $\min(\sup(A), \sup(B)) = 5$.
Or : $A \cap B = \{3, 4\}$.
Donc : $\inf(A \cap B) = 3$ et $\sup(A \cap B) = 4$.
On a donc bien :

$$\boxed{\max(\inf(A), \inf(B)) < \inf(A \cap B) < \sup(A \cap B) < \min(\sup(A), \sup(B))}$$

Remarque 2.1. *Les bornes supérieures et inférieures de l'exemple précédent sont en fait les minimums et les maximums des ensembles étudiés. Pour que les bornes supérieures et inférieures ne soient pas des minimums et des maximums, on peut prendre par exemple :* $A =]1, 2[\cup]3, 4[\cup]5, 6[$ *et* $B =]2, 5[$.

2.2 Exerice 16

On fixe $n \in \mathbb{N}$.
On a : $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad kx - 1 \leq \mathrm{E}(kx) \leq kx$.

Donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (kx - 1) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}(kx) \leq \sum_{k=0}^{n} kx$.

Les suites $(kx - 1)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(kx)_{k \in \mathbb{N}}$ sont des suites arithmétiques.

Donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (kx - 1) = \frac{(n+1)\big((nx - 1) + (-1)\big)}{2} = \frac{(n+1)(nx-2)}{2}$

et : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx = \frac{(n+1)nx}{2}$.

D'où : $\displaystyle\frac{(n+1)(nx-2)}{2n^2} \leq u_n \leq \frac{(n+1)nx}{2n^2}$.

Or : $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)(nx-2)}{2n^2} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)nx}{2n^2} = \frac{x}{2}$.

$$\boxed{\text{Par le théorème des gendarmes, on en déduit : } \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \frac{x}{2}.}$$