Lycée Gustave Eiffel — Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 — Exercice hebdomadaire n°18
Rendu le 15 février 2012

Nombre d'or
Feuille 12 : Exercice 32

1 Énoncé

Exercice 32. *Nombre d'or*

Soient f une fonction définie par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par $u_0 \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ et $\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout n et à valeurs dans $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.
2. Déterminer l'unique valeur α telle que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \alpha$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - \alpha|$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

2 Résolution

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donc en particulier sur $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.
   Or : $f(2) = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3} \leq 2$.
   D'où $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right] \quad \dfrac{3}{2} = f(2) \leq f(x) \leq f\left(\dfrac{3}{2}\right) \leq 2$.
   Ainsi : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right] \quad f(x) \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.
   L'ensemble $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ est f-stable.
   De plus, $u_0 \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie et à valeurs dans $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.

2. La fonction f est continue sur $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.
   Donc, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers un point fixe de f dans l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.
   Or : $f(x) = x \iff 1 + \dfrac{1}{x} = x \iff \dfrac{x+1}{x} = x \iff x + 1 = x^2$.
   $$\iff x^2 - x - 1 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$$
   $$\iff \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$
   $$\iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
   D'autre part, $2 < \sqrt{5} < 3$. Donc : $\dfrac{3}{2} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ et : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$.

   Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. La fonction f est une somme de fonctions dérivables. Elle est donc dérivable.
   De plus, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \leq 0$.
   La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donc f' est croissante.
   Or : $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{4}{9}$.
   D'où : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right] \quad -\dfrac{4}{9} = f'\left(\dfrac{3}{2}\right) \leq f'(x) \leq 0$.
   Ainsi : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right] \quad |f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)|$.
   Or : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ et $\alpha \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.

   Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|$$

4. Montrons, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

   Initialisation : On a : $\left(\dfrac{4}{9}\right)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha|$.

La propriété est donc vraie au rang 0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
On suppose : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

On a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha| \leq \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$
La propriété est donc héréditaire.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Or : $0 < \frac{4}{9} < 1$.
Donc : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$.
Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $(|u_n - \alpha|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.