Polynômes
Feuille 13 : Exercice 3, Exercice 9(2), Exercice 15

1 Énoncé

Exercice 3. *Une suite de polynômes*

On considère la suite de polynôme définie par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le terme dominant de P_n.
2. Montrer que P_n est de même parité que n.
   i.e. $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$

Exercice 9. *Une division euclidienne avec interpolation*

Soit P un polynôme.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X^2(X-1)$ sachant que $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$ et $P(1) = 1$.

Exercice 15. *Racine d'un polynôme*

1. Montrer que 2 est zéro de $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$. Quel est son ordre ?
2. Quels sont les autres zéros de P ?
3. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Q divise P.

2 Résolution

2.1 Exercice 3

On considère la suite de polynôme définie par :

1. Pour tout polynôme P, nous notons $td(P)$ le terme dominant de P.
   On a : $P_0 = 1$. Donc : $td(P_0) = 1$.
   On a : $P_1 = X$. Donc : $td(P_1) = X$.
   On a : $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 1$. Donc : $td(P_2) = X^2$.
   On a : $P_3 = XP_2 - P_1 = X(X^2-1) - X = X^3 - 2X$. Donc : $td(P_3) = X^3$.
   Montrons par une récurrence double que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad td(P_n) = X^n$.
   Initialisation : Les calculs précédents nous assure que la propriété est vrai du rang 0 au rang 4.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On suppose : $td(P_n) = X^n$ et $td(P_{n+1}) = X^{n+1}$.
   On a : $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.
   Or : $td(XP_{n+1}) = Xtd(P_{n+1}) = X^{n+2}$ et $td(P_n) = X^n$.
   En particulier, $\deg(XP_{n+1}) > \deg(P_n)$.
   D'où : $td(P_{n+2}) = td(XP_{n+1}) = X^{n+2}$.
   La propriété est donc héréditaire.
   On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad td(P_n) = X^n}$
2. Montrons par une récurrence double que P_n est de même parité que n.
   Initialisation : On a : $P_0 = 1$. Donc, P_0 est pair.
   On a : $P_1 = X$. Donc, P_1 est impair.
   La propriété est donc vraie aux rangs 0 et 1.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On suppose que P_n est de même parité que n et que P_{n+1} est de même parité que $n+1$.
   On a donc : $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X) = (-1)^{n+2} P_n(X)$
   et : $P_{n+1}(-X) = (-1)^{n+1} P_{n+1}(-X)$.
   D'où :
   $$\begin{aligned} P_{n+2}(-X) &= (-X).P_{n+1}(-X) - P_n(-X) \\ &= (-1).(-1)^{n+1} XP_{n+1}(X) - (-1)^{n+2} P_n(X) \\ &= (-1)^{n+2}(XP_{n+1}(X) - P_n(X)) \\ &= (-1)^{n+2} P_{n+2}(X) \end{aligned}$$
   Le polynôme P_{n+2} est bien de même parité que $n+2$.
   La propriété est héréditaire.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de même parité que n.

3 Exercice 9 (2)

On a : $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$ et $P(1) = 1$.
Soit $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ le quotient et le reste de P par $X^2(X-1)$.
On a : $P = X^2(X-1)Q + R$ et $\deg(R) \leq 2$.
Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $R = aX^2 + bX + c$.
0 est une racine au moins double de $T = X^2(X-1)Q$. Donc : $T(0) = T'(0) = 0$.
Donc : $P(0) = R(0) = c = 1$.
et : $P'(0) = R'(0) = b = 2$.
1 est une racine de T.
Donc : $P(1) = R(1) = a + b + c = a + 3 = 1$.

D'où : $a=-2$.
On en déduit que : $\boxed{R=-2X^2+2X+1}$

3.1 Exercice 15

1. On a : $P(2) = 2^4 - 9.2^3 + 30.2^2 - 44.2 + 24$
$= 16 - 72 + 120 - 88 + 24$
$= 0$

   $\boxed{\text{On en déduit que 2 est une racine de } P.}$
   On a : $P' = 4X^3 - 27X^2 + 60X - 44$.
   Donc : $P'(2) = 4.2^3 - 27.2^2 + 60.2 - 44$
$= 32 - 108 + 120 - 44$
$= 0$
   On a : $P'' = 12X^2 - 54X + 60$.
   Donc : $P''(2) = 12.2^2 - 54.2 + 60$
$= 48 - 108 + 60$
$= 0$
   On a : $P^{(3)} = 24X - 54$
   Donc : $P^{(3)}(2) = 24.2 - 54 = 48 - 54 = -6 \neq 0$.

   $\boxed{\text{On en déduit que 2 est une racine d'ordre de multiplicité 3 de } P.}$

2. Par conséquent, il existe un polynôme Q tel que : $P = (X-2)^3.Q$.
   Considérant les termes de plus haut et de plus bas degré, on obtient : $P = (X-2)^3.(X-3)$.

   $\boxed{\text{Le polynôme } P \text{ admet donc une seule autre racine : 3.}}$

   Remarque 3.1. *On peut également remarquer que le degré de P est 4 et que 2 est une racine triple de P.*
   Le polynôme admet donc une autre racine α.
   Par les relations coefficients-racines, on a donc : $2^3.\alpha = 24$.
   D'où : $\alpha = 3$.

3. On a : $Q|P \iff \exists R \in \mathbb{R}[X] \quad P = QR$
$\iff \exists R \in \mathbb{R}[X] \quad QR = (X-2)^3.(X-3)$
   Ainsi, si $Q|P$, alors les seules racines possibles de Q sont 2 et 3 et leur multiplicité respective est au plus 3 et 1.
   Réciproquement :
   Les seules racines possibles de Q sont 2 et 3 et leur multiplicité respective est au plus 3 et 1 si, et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $n \in \{0,1,2,3\}$ et $m \in 0,1$ tel que : $Q = \alpha(X-2)^n(X-3)^m$.
   Dans ce cas, on a : $P = \frac{1}{\alpha}(X-2)^{3-n}(X-3)^{1-m}Q$ et donc : $Q|P$.

   $\boxed{\text{On en déduit que } Q|P \text{ si, et seulement si, } Q \text{ est un polynôme de la forme } Q = \alpha(X-2)^n(X-3)^m \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}^*,\ n \in \{0,1,2,3\} \text{ et } m \in 0,1.}$