

Fonctions d'une variable réelle
Feuille 14 : Exercice 14, Exercice 16(1), Exercice 25

1 Énoncé

Exercice 14. Prolongement par continuité

La fonction f définie par : $f(x) = x^2 + 3x + \alpha$ si $|x| > 2$ et $f(x) = 2x - 1$ si $|x| < 2$ est-elle prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 18. Morphisme de groupe continue

- On cherche à déterminer les endomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$ qui sont continues. Soit φ un tel endomorphisme.
 - Montrer : $\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \quad \varphi(nx) = n\varphi(x)$.
 - En déduire : $\forall (r, x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \quad \varphi(rx) = r\varphi(x)$.
 - En déduire une expression de φ .

Exercice 25. Température aux antipodes.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et T -périodique ($T > 0$).

Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que : $f\left(c + \frac{T}{2}\right) = f(c)$.

Application : montrer qu'il existe, sur la Terre, deux point antipodaux où la température est la même.

2 Résolution

2.1 Exercice 14

On a : $\forall x \in]-2, 2[\quad f(x) = x^2 + 3x + \alpha$
et $\forall x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\quad f(x) = 2x - 1$.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -5$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2 + \alpha$.

Donc, la fonction f se prolonge par continuité en -2 si, et seulement si $-2 + \alpha = -5$ si, et seulement si $\alpha = -3$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 10 + \alpha$.

Donc, la fonction f se prolonge par continuité en 2 si, et seulement si $10 + \alpha = 3$ si, et seulement si $\alpha = -7$.

2.2 Exercice 18

L'application φ est un endomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$.

On a donc : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \quad \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

- On cherche à déterminer les endomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$ qui sont continues. Soit φ un tel endomorphisme.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(nx) = n\varphi(x)$.

Initialisation : L'application φ est un morphisme de groupe.

Donc : $\varphi(0.x) = \varphi(0) = 0 = 0.\varphi(x)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose : $\varphi(n.x) = n.\varphi(x)$.

On a : $\varphi((n+1).x) = \varphi(n.x + x) = \varphi(n.x) + \varphi(x) = n.\varphi(x) + \varphi(x) = (n+1).\varphi(x)$.

La propriété est donc héréditaire.

Par le principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(nx) = n\varphi(x)$.

Soit $n \in \mathbb{Z}^-$.

On a : $\varphi(n.x) = \varphi(-(-n).x) = -\varphi((-n).x)$.

Or : $-n \in \mathbb{N}$.

Donc : $\varphi(n.x) = -(-n).\varphi(x) = n.\varphi(x)$.

Ainsi : $\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \quad \varphi(nx) = n\varphi(x)$.

- Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que : $r = \frac{p}{q}$.

On a : $\varphi(r.x) = \varphi\left(\frac{p}{q}.x\right) = p.\varphi\left(\frac{1}{q}.x\right)$.

Or : $\varphi(x) = \varphi\left(q.\frac{1}{q}.x\right) = q.\varphi\left(\frac{1}{q}.x\right)$.

Donc : $\varphi\left(\frac{1}{q}.x\right) = \frac{1}{q}.\varphi(x)$.

Ainsi : $\varphi(r.x) = \frac{p}{q}.\varphi(x)$.

On en déduit : $\forall (r, x) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \quad \varphi(rx) = r\varphi(x)$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnel qui converge vers x .

On a : $\varphi(r_n) = r_n.\varphi(1)$.

Puisque φ est continue, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(r_n) = \varphi(x)$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n.\varphi(1) = x.\varphi(1)$.

On en déduit que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = x \cdot \varphi(1)}$

Remarque 2.1. *On montre aisément qu'une fonction de cette forme est un endomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$.*

2.3 Exercice 25

Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = f\left(x + \frac{T}{2}\right) - f(x)$.

Par somme et composée de fonctions continues, la fonction g est continue.

Or : $g(0) = f\left(\frac{T}{2}\right) - f(0)$.

et : $g\left(\frac{T}{2}\right) = f(T) - f\left(\frac{T}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{T}{2}\right)$ car f est T -périodique.

Ainsi : $g(0) = -g\left(\frac{T}{2}\right)$.

Par un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un

point $c \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$.

On a alors : $\boxed{f\left(c + \frac{T}{2}\right) = f(c)}$

Application : Considérons la fonction f qui donne la température en un point de l'équateur en fonction de sa longitude en radian. La fonction f est 2π -périodique et nous faisons l'hypothèse qu'elle est continue. Par l'étude précédente, il existe $c \in [0, \pi]$ tel que $f(c + \pi) = f(c)$. Ainsi, les points de l'équateur de longitude c et $c + \pi$ sont antipodaux et ont la même température.

$\boxed{\text{Il existe bien sur la terre deux points antipodaux qui ont la même température.}}$

Remarque 2.2. *On peut appliquer ce raisonnement sur n'importe quel cercle placé sur la sphère terrestre dont le centre est le centre de la terre. L'équateur n'a évidemment rien de particulier.*