Lycée Gustave Eiffel Année 2011-2012
Mathématiques PTSI 2 Exercice hebdomadaire n°21
Rendu le 28 mars 2012

Dérivation
Feuille 15 : Exercice 9, Exercice 12

1 Énoncé

Exercice 9. *Étude d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est dérivable deux fois en 0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x < 0$:
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}} \quad (\mathcal{H}_n)$$
On précisera les valeurs de P_1 et P_2 et une relation de récurrence entre P_n, P_n' et P_{n+1}.
3. Montrer que la fonction f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 12. *Théorème des accroissements finis généralisé*

Soit $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. Montrer que : $\exists c \in]a,b[\quad (f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$.
2. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$ et $\forall t \in]a,b[\ g'(t) \neq 0$.
En déduire que : $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = l \in \mathbb{R} \implies \lim\limits_{t \longrightarrow a} \dfrac{f(t)}{g(t)} = l$

2 Résolution

2.1 Exercice 9

1. On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ et la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction f est donc continue en 0.
Sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$, la fonction est une composée de fonctions dérivables. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Ainsi, on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = 0$.
On pose $X = \dfrac{1}{x}$.
On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.
Si $x < 0$, on a alors : $f'(X) = -X^2 e^X$.
Par les croissances comparées, on a : $\lim\limits_{X \longrightarrow -\infty} -X^2 e^X = 0$.
et donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f'(x) = 0$.
Par le principe de prolongement de la dérivée, la fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
On a : $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
Ainsi, on a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = 0$.
Si $x < 0$, on a alors : $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = -X^3 e^X$.
Par les croissances comparées, on a : $\lim\limits_{X \longrightarrow -\infty} -X^3 e^X = 0$ et donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = 0$.
Ainsi : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = 0$.
$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc dérivable deux fois en 0.}}$
2. Sur $\mathbb{R}^{-*}$, la fonction f est une composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.
Montrer que, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x < 0$:
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{\frac{1}{x}} \quad (\mathcal{H}_n)$$
Initialisation : On a déjà vu que sur $\mathbb{R}^{-*}$, on a : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.
En posant $P_1 = -1$, on a bien : on a : $f'(x) = \dfrac{P_1(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.
On a : $f''(x) = \left(\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right) e^{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{2x+1}{x^4}\right) e^{\frac{1}{x}}$.
En posant, $P_2 = 2X + 1$, on a bien : on a : $f''(x) = \dfrac{P_2(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x < 0$: $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

On a alors : $f^{(n+1)}(x) = \left(\dfrac{P_n'(x)}{x^{2n}} - \dfrac{2nP_n(x)}{x^{2n+1}} - \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \right) \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \dfrac{x^2 \frac{P_n'(x)}{-}(2nx+1)P_n(x)}{x^{2n+2}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

En posant $P_{n+1} = X^2 P_n' - (2nX+1)P_n$, on obtient : $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

La propriété est donc héréditaire.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x < 0$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad (\mathcal{H}_n)$$

De plus : $P_1 = -1$, $P_2 = 2x + 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+1} = X^2 P_n' - (2nX+1)P_n$.

3. La fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par la question précédente, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrons par récurrence que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Initialisation : Nous avons montré à la question 1 que la fonction f est dérivable deux fois en 0. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$ en 0.

   La fonction $f^{(n)}(x)$ est continue en 0.

   D'autre part, sur $\mathbb{R}^{-*}$, on a : $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

   Le polynôme P_{n+1} est continue sur $\mathbb{R}$. Il admet donc une limite finie en 0.

   D'autre part, en posant à nouveau $X = \dfrac{1}{x}$, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^{2(n+1)}} = X^{2(n+1)} \mathrm{e}^X$.

   Or : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0-} \dfrac{1}{X} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \longrightarrow -\infty} X^{2(n+1)} \mathrm{e}^X = 0$.

   D'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0-} f^{(n+1)}(x) = 0$.

   D'autre part, la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc, sur $\mathbb{R}^{+*}$, $f^{(n+1)}(x) = 0$ et donc : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} f^{(n+1)}(x) = 0$.

   D'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f^{(n+1)}(x) = 0$.

   Par le principe de prolongement de la dérivée appliqué à $f^{(n)}$, la fonction $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 et donc f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ en 0. Par le principe de récurrence, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Elle est donc $\mathcal{C}^\infty$ en 0.

   La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1. *Remarquons que* $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(0) = 0$. *En particulier par le théorème de Taylor-Young appliqué à f, on a :* $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$.

2.2 Exercice 12

1. On considère la fonction h définie sur $[a, b]$ par : $\forall x \in [a, b] \quad h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.

   Par combinaison linéaire de fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, la fonction h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

   D'autre part : $h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$ et : $h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$.

   Donc : $h(a) = h(b)$.

   Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que : $h'(c) = 0$.

   Or : $h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$.

   Il existe donc bien $c \in]a, b[$ tel que : $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

2. On suppose que : $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = l \in \mathbb{R}$.

   Soit $t \in]a, b]$.

   En appliquant la question à f et g sur l'intervalle $[a, t]$, il existe $c_t \in]a, t[$ tel que $(f(t) - f(a))g'(c_t) = (g(t) - g(a))f'(c_t)$.

   Puisque $f(a) = g(a) = 0$, on obtient : $\dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{f(t) - f(a)}{g(t) - g(a)} = \dfrac{f'(c_t)}{g'(c_t)}$.

   Or $a < c_t < t$. Donc, par le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{t \longrightarrow a} c_t = a$.

   Or $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \dfrac{f'(t)}{g'(t)} = l \in \mathbb{R}$.

   D'où, par composée de limites : $\boxed{\lim\limits_{t \longrightarrow a} \dfrac{f(t)}{g(t)} = l}$

Remarque 2.2. *Cette propriété est appelée règle de L'Hôpital (mathématicien français du XVII^{ème} siècle).*