Équations différentielles - Tangentes horizontales et points d'inflexion

Avant de démarrer, chargez la librairie `plots` grâce à la commande : `with(plots) :`

I Présentation du problème

On considère une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme : $a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (E)$
L'objectif de ce TP est de faire une représentation graphique d'une famille de solution de (E) accompagné de quelques courbes caractéristiques de l'équation : la courbe des points à tangentes horizontales et celles des points d'inflexion.

II Résolution d'une équation différentielle

La fonction `dsolve` permet de résoudre les équations différentielles.
Résolvons l'équation différentielle : $y' - 2xy = x$
Pour plus de commodités, nous stockons d'abord l'équation dans une variable `Eq`. Pour cela, on remplace y par `y(x)` et y' par `diff(y(x),x)` dans l'expression de l'équation. Enfin, on utilise la fonction `dsolve` :

```
> Eq :=diff(y(x),x)-2*x*y(x)=x ;
  dsolve(Eq,y(x)) ;
```

$$Eq := \left(\frac{d}{dx}y(x)\right) - 2xy(x) = x$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \mathrm{e}^{x^2}\_C1$$

Le terme $\_C1$ représente le paramètre de la solution générale.
Pour récupérer l'expression de la solution générale de l'équation, on utilise la fonction `rhs` (abréviation de "right hand side") :

```
> sol :=rhs(dsolve(diff(y(x),x)-2*x*y(x)=x,y(x))) ;
```

$$sol := -\frac{1}{2} + \mathrm{e}^{x^2}\_C1$$

Si le nom du paramètre de l'équation ne vous satisfait pas vous pouvez le substituer à un autre grâce à la fonction `subs` :

```
> sol :=subs(_ C1=lambda, sol) ;
```

$$sol := -\frac{1}{2} + \mathrm{e}^{x^2}\lambda$$

Pour résoudre une équation différentielle avec une condition initiale, il suffit de résoudre le système d'équations formée de l'équation différentielle et de la condition initiale à l'aide de la fonction `dsolve` :

```
> dsolve({Eq,y(0)=1},y(x)) ;
```

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2}$$

<u>Résumé :</u>	`dsolve(Eq,y(x)) ;`	Résout l'équation différentielle `Eq` d'inconnue `y(x)`.
	`dsolve({Eq,y(a)=b},y(x)) ;`	Résout l'équation différentielle `Eq` d'inconnue `y(x)` avec la condition initiale `y(a)=b`.
	`rhs(a=b) ;`	Renvoie le membre de droite de l'égalité (*i.e.* `b`).
	`subs(x=a,Expr) ;`	Renvoie l'expression `Expr` en remplaçant les occurences de `x` par `a`.

III Étude d'un exemple

Dans cette partie, l'équation (E) est l'équation suivante :

$$y' + y = x^3$$

1. Résoudre le système de Cauchy suivant :

$$(S_a)\begin{cases} y' + y = x^3 & (E) \\ y(0) = \dfrac{a}{2} \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

   On stockera l'équation (E) dans la variable `Eq` et l'expression de la solution du système précédent dans la variable `Sol`.

2. Représenter dans un même graphique les solutions de (S_a) pour $a \in \{-10, -9, \ldots, 9, 10\}$ sur $[-5, 5]$.
   On restreindra l'axe des ordonnées à $[-5, 5]$. On stockera le graphique dans la variable `graphe1`.
3. On souhaite représenter graphiquement l'ensemble des points à tangentes horizontales de l'équation (E) ; c'est-à-dire l'ensemble des points (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ tels que la solution de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$ y admettent une tangente horizontale.
   (a) On fixe y une solution de (E). Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $y'(x) = 0$.
   Déterminer la valeur de $y(x)$ en fonction de x.
   Stocker l'expression obtenue dans la variable `TH`.
   Indication : utiliser la fonction `subs` et la fonction `solve`.
   (b) Refaire le graphe de la question 2 en y ajoutant le graphe de la fonction associée à l'expression `TH`.
   Indication : On stockera le graphe de la fonction associée à l'expression `TH` dans la variable `graphe2` et on utilisera la fonction `display`.
4. On souhaite représenter graphiquement l'ensemble des points d'inflexion des solutions de l'équation (E) ; c'est-à-dire l'ensemble des points (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ tels que la solution de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$ y admettent un point d'inflexion. Par abus, on se contentera de s'assurer que la dérivée seconde s'annule.
   (a) Dériver l'équation (E) et stocker le résultat dans la variable `Eqp`.
   Déterminer l'expression de $y'(x)$ en fonction de x et de $y(x)$ lorsque $y''(x) = 0$.
   On stockera l'expression obtenue dans la variable `yprime`.
   (b) Injecter l'expression `yprime` dans l'équation (E) et déterminer la valeur de $y(x)$ lorsque $y''(x) = 0$.
   On stockera l'expression obtenue dans la variable `TI`.
   (c) Refaire le graphe de la question 3b en y ajoutant le graphe de la fonction associée à l'expression `TI`.
   Indication : On stockera le graphe de la fonction associée à l'expression `TI` dans la variable `graphe3`.

IV Généralisation

Dans cette partie, on traite le cas général initialement proposé.

1. (a) Écrire une procédure : `graphe1(Eq,x0)` qui renvoie le graphique des solutions de l'équation différentielle `Eq` telles que : $y(x_0) = \dfrac{a}{2}$ avec $a \in \{-10, -9, \ldots, 9, 10\}$.
   (b) Écrire une procédure : `graphe2(Eq)` qui renvoie le graphe de la courbe des points à tangentes horizontales de l'équation différentielle `Eq`.
   (c) Écrire une procédure : `graphe3(Eq)` qui renvoie le graphe de la courbe des points d'inflexion de l'équation différentielle `Eq`.
   (d) Écrire une procédure `graphe(Eq,x0)` qui renvoie le graphe regroupant les trois graphes précédents.
2. Tester votre procédure sur les équations suivantes :
   (a) $y' + xy = x^3$ (b) $xy' + y = x^3$ (c) $(x^2 - 1)y' + y = x^3$

   Remarque IV.1. *On ajustera de manière pertinente le paramètre x_0 de telle sorte que le graphique obtenue soit satisfaisant.*

V Pour aller plus loin...

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' + y^2 = x^3 \quad (E)$$

1. Tester les fonctions `graphe2` et `graphe3` sur l'équation (E).
   On constate que cela génère une erreur.
2. Calculer sur une feuille de papier l'équation de la courbe des points à tangentes horizontales de (E) et identifier la principale raison de ce dysfonctionnement.
3. Réécrire les fonctions `graphe2` et `graphe3` pour qu'elles puissent tenir compte de ce fait.