
Équation différentielle - Méthode d'Euler.

Avant de démarrer, chargez la librairie `plots` grâce à la commande : `with(plots)` :

1 Présentation du problème

Dans ce travail pratique, nous nous proposons d'étudier la méthode d'Euler. Cette méthode permet d'approcher les solutions d'une équation différentielle de la forme suivante :

$$y' = f(x, y) \quad (E) \quad \text{avec } x \in [a, b]$$

L'approximation obtenue est une fonction affine par morceaux. Nous précisons la méthode dans la partie 3.

En application, nous étudions l'équation différentielle suivante :

$$y' - \sin(x)y = x^2 \quad (E') \quad \text{avec } x \in [0, 2]$$

2 Calcul formel et représentation graphique.

Nous commençons par résoudre de manière formelle l'équation (E') .

1. Résoudre le système de Cauchy suivant :

$$(S'_a) \begin{cases} y' - \sin(x)y = x^2 & (E') \\ y(0) = a \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

2. Tracer sur un seul graphique les solutions de (S'_a) pour a variant dans $[-5..5]$. Stocker ce graphique dans la variable `graphe1`.

3 Description de la méthode d'Euler.

La méthode d'Euler est une méthode d'approximation des solutions d'un système de Cauchy (S) du type :

$$(S) \begin{cases} y' = f(x, y) & (E) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad \text{avec } x \in [a, b]$$

à l'aide de fonctions affines par morceaux.

Pour cela, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ où $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Sur chacun de ces intervalles, on approxime y par une fonction affine. C'est-à-dire que sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, on approxime y par une fonction dont le graphe est un segment $[M_i, M_{i+1}]$ où M_i désigne un point de coordonnées (x_i, y_i) . Ainsi, il suffit de déterminer la suite $(y_i)_{i=0}^n$.

La méthode d'Euler consiste à construire $(y_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que le segment $[M_i, M_{i+1}]$ soit porté par la tangente en x_i de la solution de (E) telle que $y(x_i) = y_i$ (Cf. figure 1).

L'usage de Maple est inutile pour ces questions.

1. Par soucis de simplicité, on choisit de subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en $n \in \mathbb{N}^*$ intervalles de longueurs égales.
 - (a) Préciser la longueur h de ces sous-intervalles.

Le nombre h est appelé pas de la méthode d'Euler.

On montre que si h tend vers 0, alors la solution approchée par la méthode converge vers la solution de l'équation différentielle (sous de bonnes hypothèses sur f).
 - (b) Donner une expression de x_i en fonction de i .
2. Donner l'équation de la tangente en x_i de la solution de (E) telle que $y(x_i) = y_i$.
3. En déduire une expression de y_{i+1} en fonction de y_i .

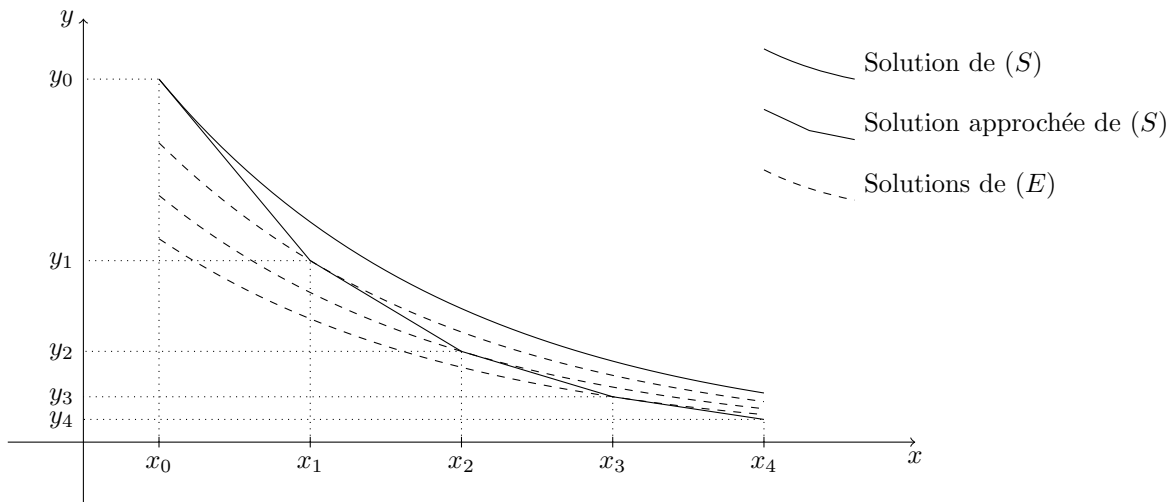


FIGURE 1 – Approximation par la méthode d'Euler

4 Implémentation de la méthode

1. Écrire une procédure Maple `Euler(y0,n,a,b,f)` qui génère les couples (x_i, y_i) sous la forme d'une liste : $[[x_0, y_0], [x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]]$.
2. Réécrire l'équation (E') sous la forme de (E) et créer la fonction Maple `f` correspondante.
3. Représenter sur un même graphique la solution de (E') tel que $y_0 = 1$ et la solution calculée à l'aide de la méthode d'Euler pour $n = 20$.

Indication : La commande `plot([[x_0, y_0], [x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]])` trace les segments d'extrémités $[x_i, y_i]$ et $[x_{i+1}, y_{i+1}]$ pour i variant dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

5 Étude comparative

1. Représenter sur un seul graphique les approximations des solutions de (S'_a) avec a variant dans $\llbracket -5..5 \rrbracket$. Stocker ce graphique dans la variable `graphe2`.
2. Représenter dans un même graphique les approximations et les solutions que vous avez calculées.
3. Commenter.