Approximation de la fonction racine carrée

1 Présentation du problème

L'objectif de ce TP est de mettre au point des procédures permettant de calculer des racines carrées de nombres réels positifs. Pour cela, nous allons mettre en œuvre plusieurs techniques classiques d'approximation des racines carrées. Pour évaluer leurs efficacités, nous évaluerons le nombre d'opérations effectuées lors de nos calculs.

Remarque : On pourra exploiter l'inégalité suivante : $\forall A \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt{A} \leq \dfrac{A+1}{2}$.

2 La Méthode de dichotomie.

La méthode de dichotomie est une technique générale qui permet d'approximer les annulations d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$. Les hypothèses de cette méthode sont : "$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés et f est continue". Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que la fonction f s'annule dans l'intervalle $[a, b]$.

Pour trouver une approximation d'une des annulations de f, nous déterminons d'abord si elle se situe dans $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ ou dans $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ de la manière suivante :

- Si $f(a)$ et $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ sont de signes opposés, le théorème précédent nous assure que f s'annule dans l'intervalle $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$.
- Sinon, elle s'annule dans l'intervalle $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$.

Nous choisissons celui des deux intervalles où nous sommes sûrs que la fonction s'annule. Nous ré-appliquons cette méthode à ce nouvel intervalle. Nous répétons cette opération jusqu'à ce que l'intervalle soit d'une longueur plus petite ou égale à la précision voulue. Chacune des bornes de l'intervalle fournit alors une approximation de l'annulation, l'une par défaut et l'autre par excès.

En pratique, on construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

1. $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
2. si $f(a_n)$ et $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$ sont de signes opposés, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ sinon $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On montre alors aisément que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une annulation de f. On se propose de mettre en œuvre la méthode de dichotomie avec Maple pour le calcul de la fonction racine carrée.

1. Au bout de n étapes, quelle est, en fonction de a, b et n, la longueur de l'intervalle $[a_n, b_n]$?
2. Déterminer une fonction polynomiale f qui s'annule en $\sqrt{A}$.
3. Ecrire une procédure `Dichotomie(A,epsilon)` sous Maple donnant un encadrement de $\sqrt{A}$ à ε près en appliquant la méthode de dichotomie à la fonction f précédente. On rendra la solution sous la forme d'une liste `[`α`,`β`]`.
4. Tester votre procédure en évaluant $\sqrt{3}$ en faisant varier la précision.
5. Modifier la fonction `Dichotomie` de telle sorte qu'elle indique également le nombre d'opérations (additions, multiplications, divisions, tests...) effectuées lors du calcul. On rendra le résultat sous la forme : `[[`α`,`β`],N]` où N désigne le nombre d'opérations effectuées lors du calcul.
6. Tester votre procédure en évaluant $\sqrt{3}$ en faisant varier la précision.

3 La méthode de Théon de Smyrne

Théon de Smyrne : philosophe, astronome et mathématicien grec du $2^{ème}$ siècle après J.-C.
On considère la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1. $r_0 = 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad r_{n+1} = \dfrac{r_n + A}{r_n + 1}$

On montre que les suites $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers $\sqrt{A}$.

1. Écrire une procédure `Theon(A,epsilon)` sous Maple donnant un encadrement de $\sqrt{A}$ à ε près. On rendra la solution sous la forme d'une liste `[`α`,`β`]`.
2. Tester votre procédure en évaluant $\sqrt{3}$ en faisant varier la précision.
3. Modifier la fonction `Theon` de telle sorte qu'elle indique également le nombre d'opérations effectuées lors du calcul. On rendra le résultat sous la forme : `[[`α`,`β`],N]` où N désigne le nombre d'opérations effectuées lors du calcul.
4. Tester votre procédure en évaluant $\sqrt{3}$ en faisant varier la précision.

4 La méthode de Héron d'Alexandrie

Héron d'Alexandrie : mathématicien du 1^{er} siècle après J.-C.

On considère la suite (u_n) définie par :

1. $u_0 \geq \sqrt{A}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{A}{u_n}\right)$

Dans ces conditions, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît alors vers $\sqrt{A}$. On remarque ainsi que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{A}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

1. Écrire une procédure `Heron(A,epsilon)` sous Maple donnant un encadrement de $\sqrt{A}$ à ε près. On rendra la solution sous la forme d'une liste `[`α`,`β`]`.
2. Tester votre procédure en évaluant $\sqrt{3}$ en faisant varier la précision.
3. Modifier la fonction `Heron` de telle sorte qu'elle indique également le nombre d'opérations effectuées lors du calcul. On rendra le résultat sous la forme : `[[`α`,`β`],N]` où N désigne le nombre d'opérations effectuées lors du calcul.
4. Tester votre procédure en évaluant $\sqrt{3}$ en faisant varier la précision.

5 Bilan

1. Représenter graphiquement en fonction de A le nombre de calculs nécessaires pour chacune des méthodes sur un intervalle de votre choix en fixant la précision.
2. Conclure.