Polynômes

I Objectif du TP

L'objectif de ce TP est de vous familiariser avec les polynômes sous l'environnement Maple. Nous aborderons plusieurs problématiques liées aux polynômes : étude des racines d'un polynôme, interpolation, développements limités...

II Manipulation des polynômes

II.1 Manipulation des coefficients

La commande `collect(P,x)` réécrit le polynôme `P` sous la forme $a_0 + a_1 + \cdots + a_n x^n$:

```
> P :=x*y+3*x^2+y^2*x^2+x+1 ;
  Q :=collect(P,x) ;
```

$$P := xy + 3x^2 + x^2y^2 + x + 1$$
$$Q := 1 + (3 + y^2)x^2 + (y + 1)x$$

On peut ordonner les termes grâce à la commande `sort(Expr)` qui ordonne les termes de l'expression `Expr` :

```
> sort(Q) ;
```

$$(y^2 + 3)x^2 + (y + 1)x + 1$$

La commande `coeff(P,x,k)` renvoie le coefficient d'ordre `k` du polynôme `P` en la variable `x`.

```
> P :=x^4+3*x^2+x+1 ;
  coeff(P,x,2) ;
```

$$P := x^4 + 3x^2 + x + 1$$
$$3$$

Bien entendu, la fonction `coeff` fonctionne également avec les polynômes dépendant de paramètre :

```
> P :=x*y+3*x^2+y^2*x^2+cos(y)*x+1+3*x ;
  coeff(P,x,1) ;
```

$$P := xy + 3x^2 + y^2x^2 + \cos(y)x + 3x + 1$$
$$y + \cos(y) + 3$$

On peut également calculer le degré d'un polynôme `P` grâce à la commnde `degree(P)` :

```
> P :=x^2+3*x+4 ;
  degree(P) ;
```

$$P := x^2 + 3x + 4$$
$$2$$

Si le polynôme `P` dépend d'un paramètre, on précise la variable du polynôme :

```
> P :=x^3+3*x^2*y-x*y^2+5*y^3 ;
  degree(P,x) ;
```

$$P := x^3 + 3x^2y - xy^2 + 5y^3$$
$$3$$

Les commandes `quo(P,Q,x)` et `rem(P,Q,x)`calcule le quotient et le reste de la division euclidienne des polynômes `P` et `Q` en la variable `x` :

```
> P :=x^3-2*x^2+3*x-4 ;
  Q :=x^2+x+1 ;
  quo(P,Q,x) ;
  rem(P,Q,x) ;
```

$$P := x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$
$$Q := x^2 + x + 1$$
$$x - 3$$
$$-1 + 5x$$

II.2 Calcul de développement limité

La commande `series(f(x),x,n)` calcule un développement limité de `f(x)` en 0.

```
> series(cos(x),x,5) ;
```

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^5)$$

Remarque II.1. *Remarquons que le reste du développement n'est pas un* $\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$ *mais un* $\underset{x\to 0}{O}\left(x^5\right)$ *qui est en fait un* $\underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$.

La commande `series(f(x),x,n)` ne calcule pas un développement limité de `f(x)` en 0 à l'ordre n :

```
> series(ln(1+x)/x,x,5) ;
```

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + O(x^4)$$

En fait, elle se limite dans ces calculs à utiliser les développements limités usuels jusqu'à l'ordre $n-1$ (c'est à dire les n premiers termes.
Bien entendu, Maple ne calcule pas seulement les développements limités en 0. La commande `series(f(x),x=a,n)` calcule un développement limité de `f(x)` en a.

```
> series(cos(x),x=Pi/3,5) ;
```

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5\right)$$

La commande `convert(DL,polynom)` renvoie le polynôme associé au développement limité `DL`.

```
> convert(series(sqrt(1+x),x,5),polynom) ;
```

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$

La commande series permet également de calculer des développements asymptotiques :

```
> series(ln(sqrt(x)+1),x,3) ;
```

$$\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + O(x^3)$$

III Développements limités

III.1 Un exemple

Soit f la fonctions définie par : $f(x) = \ln(1+x)/(x+2)$.

1. Créer la fonction f.
2. Déterminer le développement de f à l'ordre 3 en 0.
3. (a) Stocker dans la variable `P` le polynôme associé au développement limité précédent.
   (b) Représenter sur un même graphique `P` et f sur l'intervalle $[-5, 5]$.
4. Déterminer le coefficient d'ordre 3 du développement limité précédent.

III.2 Des exercices

1. Déterminer $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^6$ tels que :

$$\operatorname{sh}(x) - \frac{ax + bx^3 + cx^5}{1 + dx^2 + ex^4}$$

   soit un infiniment petit d'ordre maximum en 0 (c'est à dire la plus négligeable possible en 0).
   Représenter sur un même graphique sh et la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{ax + bx^3 + cx^5}{1 + dx^2 + ex^4}\right)$.

2. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ et f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{a}{\sin(x)} + \frac{b}{\tan(x)} + \frac{cx}{\cos(x)} + \frac{d}{x}$$

   (a) Déterminer une condition nécessaire pour que f se prolonge par continuité en 0.
   (b) Déterminer la valeur de (a, b, c, d) pour qu'ainsi prolongé la fonction f soit un infiniment petit d'ordre maximum en 0.

IV Détermination de coefficients

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le polynôme suivant :

$$P(X) = X^6 + \sqrt{3}X^4 + aX^2 + bX + c$$

   Déterminer toutes les valeurs de (a, b, c) tel que P admette 1, 2 et 3 pour racines.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère le polynôme suivant :

$$P(X) = X^4 + aX^3 + \sqrt{3}X^2 + X + b$$

   (a) Déterminer a et b pour que le polynôme P admette $1 + 2i$ pour racine.

   (b) Donner alors la factorisation dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$ de P.

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le polynôme suivant :

$$P(X) = X^6 + \sqrt{2}X^5 + aX^2 + bX + c$$

   Déterminer toutes les valeurs de (a, b, c) tel que P admette une racine d'ordre au moins 4.

V Racines d'un polynôme

1. Déterminer les racines exactes des polynômes suivants :

   (a) $P_1 = X^4 - 15X^2 - 10X + 24$

   (b) $P_2 = X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 14X - 8$

   (c) $P_3 = X^4 + 3X^2 - 6X + 10$

   (d) $P_4 = X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1$

   Indication : On stockera les racines de ces polynômes dans les listes `L1`, `L2`, `L3` et `L4`.

2. (a) Écrire une procédure `FactC(L,X)` qui donne la factorisation dans $\mathbb{C}$ du polynôme en la variable `X` et dont la liste des racines est donnée par `L`.

   (b) Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4.

3. (a) Écrire une procédure `FactR(L,X)` qui donne la factorisation dans $\mathbb{R}$ du polynôme en la variable `X` et dont la liste des racines est donnée par `L`.
   Indications :

      i. On fera l'hypothèse que les racines conjuguées se succèdent dans la liste `L`.

      ii. Le type d'une variable réelle est `realcons`.

   (b) Factoriser dans $\mathbb{R}$ les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4.

4. (a) Écrire une procédure `RelCoefRac(P,L,X)` qui vérifie si un polynôme `P` en `X` de degré 4 admet pour racines les nombres contenus dans la liste `L` en vérifiant les relations coefficients-racines d'un polynôme.

   (b) Tester votre procédure sur les exemples précédents.