Intégration numérique

1 Présentation du problème

L'objectif de ce travail pratique est d'étudier plusieurs méthodes d'approximation d'intégrales :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

où f est une fonction continue et a et b deux points du domaine de définition de f.

En guise d'exemple, nous calculerons des valeurs approchées de :

$$I_1 = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$$

2 Motivations

Les applications du calcul intégral sont très nombreuses : calculs d'aire, équations différentielles, séries de Fourier, traitement su signal... C'est un outil de calcul fondamental pour beaucoup de sciences.

Malheureusement, il est très souvent impossible de calculer exactement une intégrale. Par exemple, grâce à la fonction Maple `int`, calculer : $\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$. On stockera également dans la variable `I1` la valeur approcher de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$

Le résultat obtenu utilise la fonction `erf` appelée fonction d'erreur. Elle est définie par

$$\mathrm{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$$

Le résultat proposé par Maple n'est donc pas du tout satisfaisant. Il est possible (mais c'est très difficile) de montrer que $(x \longmapsto e^{-x^2})$ n'admet pas de primitive qui s'exprime à l'aide des fonctions usuelles. Pour contourner ce type de problème, une solution consiste à faire du calcul approché.

3 Commande Maple pour le calcul d'une somme ou d'un produit

Commençons par un exercice de programmation :

1. Écrire une procédure Maple `somme` telle que `somme(n,m,f)` calcule $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} f(k)$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{200} \frac{1}{k^2}$ à 10^{-8} près.

3.1 Sommes

Sous Maple, deux instructions permettent de calculer la somme d'une expression `Expr` en faisant varier un indice `k` entre `n` et `m` :

1. `sum(Expr,k=n..m)`
2. `add(Expr,k=n..m)`

La différence entre ces deux instructions tient au fait que la première instruction va chercher à trouver une expression de la somme indépendemment du choix des bornes tandis que la seconde va faire réellement le calcul. En particulier, la fonction `sum` accepte que ses bornes soient des variables inconnues et la fonction `add` n'accepte que des bornes explicites, *i.e.* des nombres.

Exemple 3.1. *1. Calculer* $\sum_{k=0}^{10^7} k$ *avec ces deux fonctions en comparant empiriquement les temps de calcul.*

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *et* $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

3.2 Produits

Il y a exactement la même distinction entre les instructions `product` et `mul` qu'entre `sum` et `add`. La syntaxe est exactement la même :

1. `product(Expr,k=n..m)`
2. `mul(Expr,k=n..m)`

Exemple 3.2. *Sans l'aide de Maple puis avec Maple, calculer* $\prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}}$ *et* $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k\pi}{k+1}$. *Comparer les résultats obtenus.*

Résumé :	`sum(Expr,k=n..m)`	calcule la somme de l'expression `Expr` entre `n` et `m`
	`add(Expr,k=n..m)`	calcule la somme de l'expression `Expr` entre `n` et `m` de manière effective
	`product(Expr,k=n..m)`	calcule le produit de l'expression `Expr` entre `n` et `m`
	`mul(Expr,k=n..m)`	calcule le produit de l'expression `Expr` entre `n` et `m` de manière effective

4 La méthode de rectangles

C'est la méthode la plus élémentaire que l'on puisse imaginer. On approxime la fonction à intégrer par une fonction en escalier (constante par morceaux). L'aire sous la fonction en escalier est union finie de rectangles dont on calcule facilement l'aire. Cette idée qui date du milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle est le fondement même de l'intégration au sens de Riemann (celle que vous connaissez).[1]

4.1 La méthode des rectangles à gauche

Pour cette méthode, on commence par subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n morceaux $[a_i, a_{i+1}]$ où $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$. On approxime la fonction f par la fonction en escalier $\tilde{f}$ telle que :

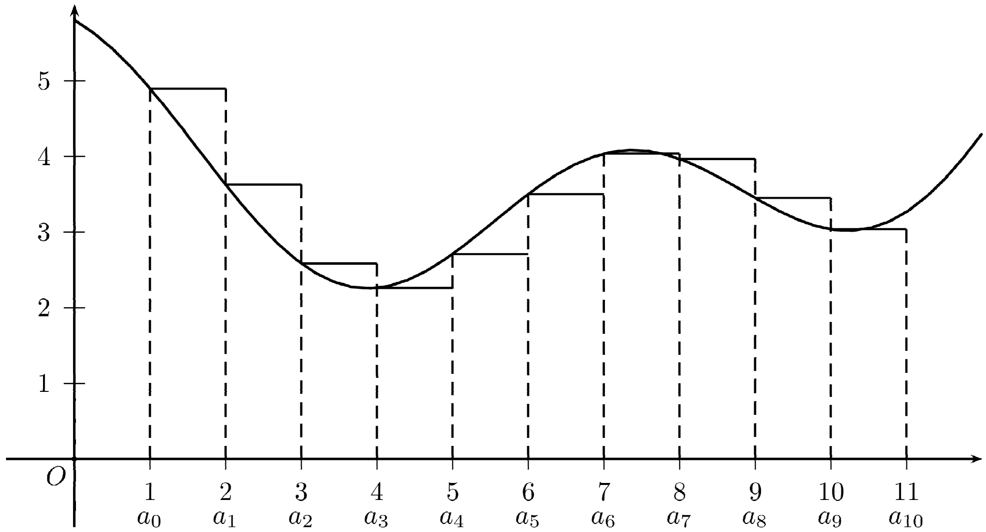
$$\tilde{f}_{|[a_i,a_{i+1}[} = f(a_i)$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i) = S_g(f)$$

1. Pour l'anecdote, au début du XX$^{\text{ème}}$, le mathématicien Henri-Léon Lebesgue a développé une théorie alternative très féconde dite intégrale au sens de Lebesgue. Cette théorie sera reprise une vingtaine d'année plus tard par Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov qui mit au point la théorie moderne des probabilités.

Le schéma suivant résume la méthode :



On suppose que les n intervalles sont tous de même longueur h.

1. Exprimer h en fonction de a, b et n.
2. Réexprimer $S_g(f)$ à l'aide de h.
3. Exprimer a_i en fonction de i.
4. Écrire une procédure `rectangleg1(f,a,b,n)` qui calcule $S_g(f)$.
5. Calculer une approximation de I_1 et comparer ce résultat avec celui contenu dans `I1`.
   On montre que : $\left| \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - S_g(f) \right| \leq \dfrac{M_1(b-a)^2}{2n}$ où $M_1 = \sup\limits_{[a,b]} |f'|$.
6. Écrire une procédure `rectangleg2(f,a,b,n)` qui renvoie un encadrement de $I(f)$ sous la forme : `[`α`,`β`]`.
   On approximera M_1 par $\max\limits_{i=0\ldots n} |f'(a_i)|$.
7. Calculer un encadrement de I_1 et comparer ce résultat avec celui contenu dans `I1`.

4.2 La méthode des rectangles à droite

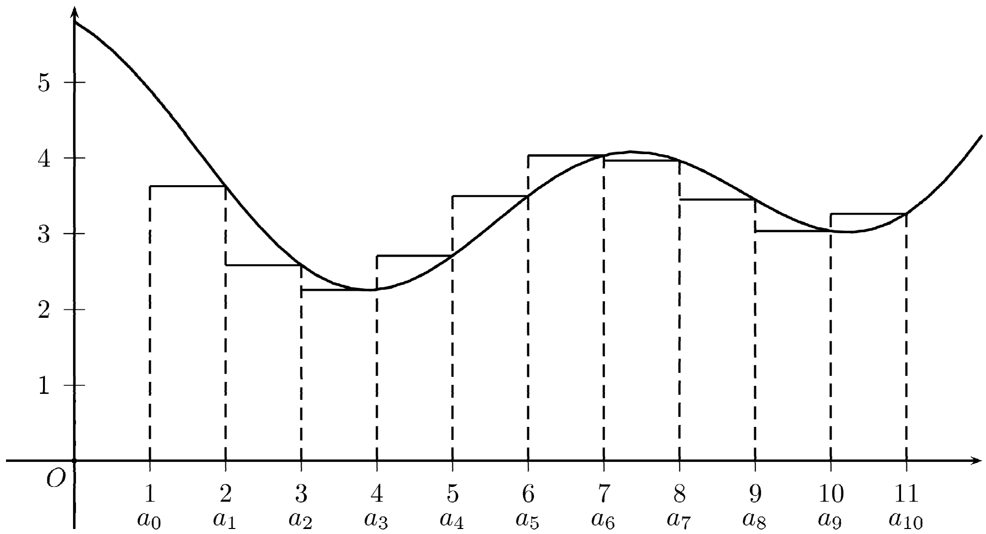
La méthode des rectangles à droite consiste à approximer la fonction f par la fonction en escalier $\tilde{f}$ telle que

$$\tilde{f}_{|[a_i,a_{i+1}[} = f(a_{i+1})$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_{i+1}) = S_d(f)$$

Le schéma précedent devient :



1. En adaptant la procédure rectangleg1, écrire une procédure rectangled1(f,a,b,n) qui calcule $S_d(f)$.
   On montre également que : $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_d(f)\right| \leq \dfrac{M_1(b-a)^2}{2n}$
2. En adaptant la procédure rectangleg2, écrire une procédure rectangled2(f,a,b,n) qui renvoie un encadrement de $I(f)$ sous la forme : [α,β].
3. Tester, à nouveau, vos procédures par le calcul de l'intégrale I_1.

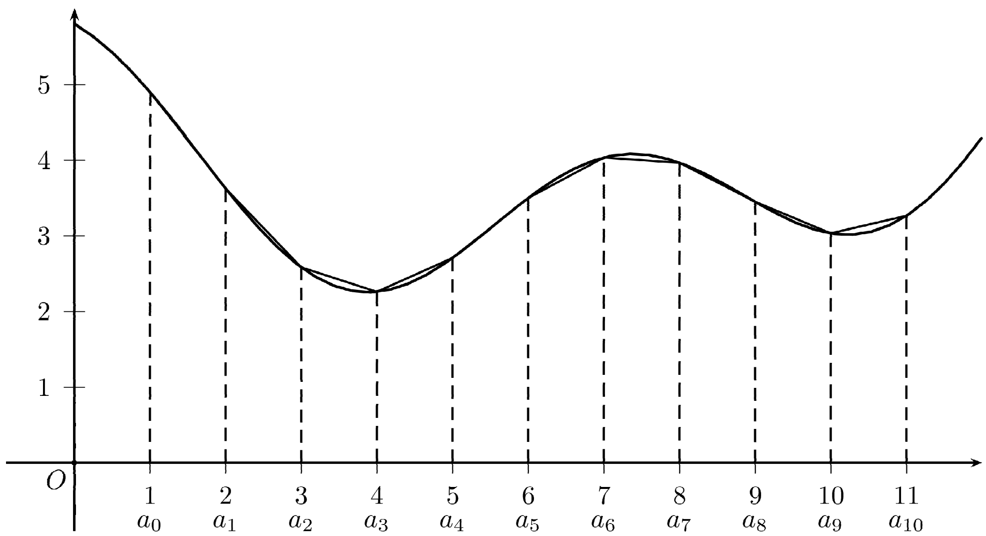
5 La méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à approximer l'intégrale de la fonction f par la fonction $\tilde{f}$ affine sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ et telle que : $\forall i \in [\![0,n]\!] \quad \tilde{f}(a_i) = f(a_i)$.

On obtient ainsi : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} = S_p(f)$

Pour simplifier notre travail, remarquons que : $S_p(f) = \dfrac{S_g(f)+S_d(f)}{2}$.

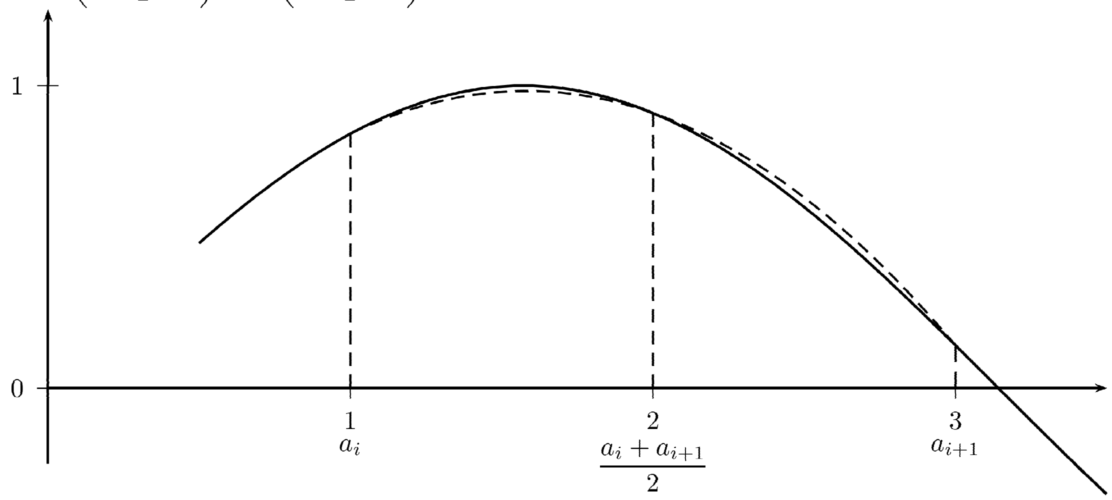
On a le schéma suivant :



1. Écrire une procédure trapeze1(f,a,b,n) qui calcule $S_p(f)$.
2. Calculer une approximation de I_1 et comparer ce résultat avec celui contenu dans I1.
   On montre que :
   $$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_p(f)\right| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$
   où $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$.
3. Écrire une procédure trapeze2(f,a,b,n) qui renvoie un encadrement de $I(f)$ sous la forme : [α,β].
   On approximera M_2 par $\max\limits_{i=0\ldots n} |f''(a_i)|$.
4. Calculer un encadrement de I_1 et comparer ce résultat avec celui contenu dans I1.

6 La méthode de Simpson

La méthode des trapèzes consiste à approximer l'intégrale de la fonction f par la fonction $\tilde{f}$ polynomiale de degré 2 sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ et telle que : $\forall i \in [\![0, n]\!] \quad \tilde{f}(a_i) = f(a_i)$ et $\tilde{f}\left(\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) = f\left(\dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}\right)$. On a le schéma suivant :



On peut calculer l'expression de $\tilde{f}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$:

$$\tilde{f}(x) = f(a_i)\frac{(x-m_i)(x-a_{i+1})}{(a_i-m_i)(a_i-a_{i+1})} + f(m_i)\frac{(x-a_i)(x-a_{i+1})}{(m_i-a_i)(m_i-a_{i+1})} + f(a_{i+1})\frac{(x-a_i)(x-m_i)}{(a_{i+1}-a_i)(a_{i+1}-m_i)}$$

où : $m_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$. Après calculs, on obtient :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \tilde{f}(x)\ \mathrm{d}x = \frac{a_{i+1}-a_i}{6}\left(f(a_i) + 4f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right) + f(a_{i+1})\right)$$

Par conséquent, on obtient :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}\left(f(a_0) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) + f(a_n)\right) = S_s(f)$$

1. Écrire une procédure `simpson1(f,a,b,n)` qui calcule $S_s(f)$.
2. Calculer une approximation de I_1 et comparer ce résultat avec celui contenu dans `I1`.
   On montre que : $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - S_s(f)\right| \leq \dfrac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}$ où $M_4 = \sup\limits_{[a,b]} |f^{(4)}|$.
3. Écrire une procédure `simpson2(f,a,b,n)` qui renvoie un encadrement de $I(f)$ sous la forme : `[`α`,`β`]`.
   On approximera M_4 par $\max\limits_{i=0\ldots n} |f^{(4)}(a_i)|$.
4. Calculer un encadrement de I_1 et comparer ce résultat avec celui contenu dans `I1`.