

Matrices

Pour manipuler les matrices, Maple a une librairie de fonctions spécifiques nommée `LinearAlgebra`. Pour la charger, il faut taper la commande : `> with(LinearAlgebra);`.

Il y a plusieurs manières de définir une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$ avec le logiciel Maple :

1. à l'aide de la fonction `Matrix` : `A:=Matrix(m,n,[[a1,1,a1,2,...,a1,n],...,[am,1,...,am,n]]);` (lignes par lignes)
2. `A:=<<a1,1|a1,2...|a1,n>,...,<am,1...|am,n>>;` (lignes par lignes)
3. `A:=<<a1,1,a2,1,...,an,1>|<a1,2,...,an,2>|...|<am,1,...,am,n>>;` (colonnes par colonnes)

Les matrices colonnes et les matrices lignes sont définies respectivement par les commandes : `<x1,x2,...,xn>` et : `<x1|x2...|xn>` (mais aussi avec la commande `Matrix`).

Le coefficient de coordonnées (i,j) d'une matrice A est désigné par : `A[i,j]` (comme pour les tableaux).

Le produit matriciel est alors : `"."`.

On fera particulièrement attention à respecter les majuscules.

Exercice 1. *Premiers pas.*

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Définir les matrices A et B .
2. Donner à l'aide d'une commande Maple, le coefficient d'indice $(2,3)$ de la matrice A .
3. Calculer l'image par la matrice A de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ puis de chacun des vecteurs de la base canonique.
4. Calculer AB et BA .
5. A l'aide de la fonction `Transpose`, vérifier que : ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.
6. En utilisant les fonctions `Determinant` et `MatrixInverse`, montrer que $C = AB$ est inversible et déterminer C^{-1} .
7. A l'aide de la fonction `ColumnSpace`, déterminer une base de $\text{Im}(A)$.
8. A l'aide de la fonction `NullSpace`, déterminer une base de $\ker(A)$.
9. (a) A l'aide de la fonction `LinearSolve`, résoudre l'équation $A.X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
(b) Donner la solution ayant pour quatrième coordonnées 1.

Exercice 2. *Calcul de A^n*

On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A . On note I_4 la matrice identité de taille 4 (on utilisera la fonction `IdentityMatrix`).

1. (a) Déterminer le déterminant de $X.I_4 - A$ noté $P(X)$.
(b) Déterminer les racines de P .
2. (a) Déterminer une base du noyau de A .
Le noyau est de dimension 1. On note u_0 le vecteur qui l'engendre.
(b) Déterminer un vecteur v_0 tel que $A.v_0 = u_0$.
3. (a) Déterminer une base du noyau de $A - 2I_4$.
Le noyau est de dimension 1. On note u_2 le vecteur qui l'engendre.

- (b) Déterminer un vecteur v_2 tel que $A.v_2 = u_2 + 2v_2$.
4. (a) Montrer que : $\mathcal{C} = (u_0, v_0, u_2, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
- (b) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$.
- (c) Calculer B^n pour $n \in [1, 10]$. En déduire une expression de B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On admettra cette formule.
- (d) Calculer alors une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. *Une équation matriciel*

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que : $A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. *Puissance de matrice*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Calculer A^n .

Indications :

1. On pourra définir A à l'aide la fonction `BandMatrix`
2. On cherchera à établir des relations de récurrence entre les coefficients de A^n et ceux de A^{n+1} . Pour les résoudre, on pourra utiliser la fonction `rsolve`.