Equations différentielles - Tangentes horizontales et points d'inflexion

II- Résolution d'une équation différentielle

```
> Eq :=diff(y(x),x)-2*x*y(x)=x ;      # On stocke l'équation dans Eq
  dsolve(Eq,y(x)) ;                   # On résout l'équation
```

$$Eq := \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) - 2\,x\,\mathrm{y}(x) = x$$

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{1}{2} + \mathbf{e}^{(x^2)}\,\_C1$$

```
> sol:=rhs(dsolve(Eq,y(x)));
  # On stocke l'expression de la solution dans sol en récupérant le membre de gauche de l'égalité précédente
```

$$sol := -\frac{1}{2} + \mathbf{e}^{(x^2)}\,\_C1$$

```
> sol :=subs( C1=lambda, sol) ;       # On remplace le paramètre _C1 par lambda
```

$$sol := -\frac{1}{2} + \mathbf{e}^{(x^2)}\,\_C1$$

```
> dsolve({Eq,y(0)=1},y(x)) ;          # On résout le système de Cauchy
```

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,\mathbf{e}^{(x^2)}$$

III Etude d'un exemple

```
> restart;
  with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

1)

```
> Eq:=diff(y(x),x)+y(x)=x^3;
  Sol:=rhs(dsolve({Eq,y(0)=a/2},y(x)));
```

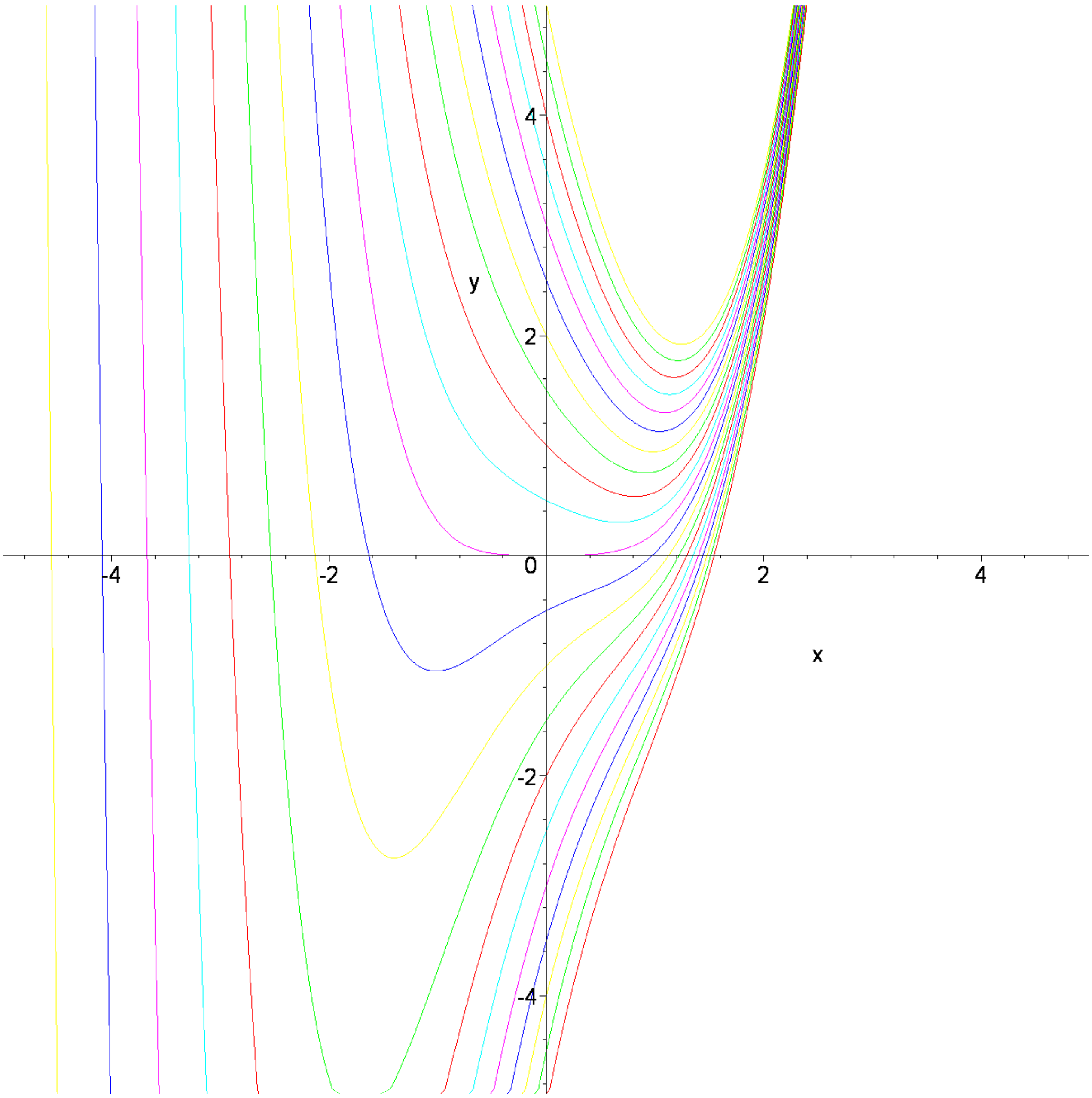
$$Eq := \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + \mathrm{y}(x) = x^3$$

$$Sol := -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \mathbf{e}^{(-x)}\left(\frac{a}{2} + 6\right)$$

2)

```
> L:=[seq(Sol,a=-10..10)];     # Création de la liste des expressions des solutions à tracer
  plot(L,x=-5..5,y=-5..5,numpoints=300);
  graphe1:=plot(L,x=-5..5,y=-5..5,numpoints=300):  # On stocke le graphique dans graphe1
```

$$L := \left[-6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \frac{3}{2}\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + 2\,\mathbf{e}^{(-x)}, \right.$$
$$-6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \frac{5}{2}\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + 3\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \frac{7}{2}\,\mathbf{e}^{(-x)},$$
$$-6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + 4\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \frac{9}{2}\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + 5\,\mathbf{e}^{(-x)},$$
$$-6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \frac{11}{2}\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + 6\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \frac{13}{2}\,\mathbf{e}^{(-x)},$$
$$-6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + 7\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \frac{15}{2}\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + 8\,\mathbf{e}^{(-x)},$$
$$-6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \frac{17}{2}\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + 9\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \frac{19}{2}\,\mathbf{e}^{(-x)},$$
$$\left. -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + 10\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + \frac{21}{2}\,\mathbf{e}^{(-x)}, -6 + 6\,x - 3\,x^2 + x^3 + 11\,\mathbf{e}^{(-x)} \right]$$



3)a)

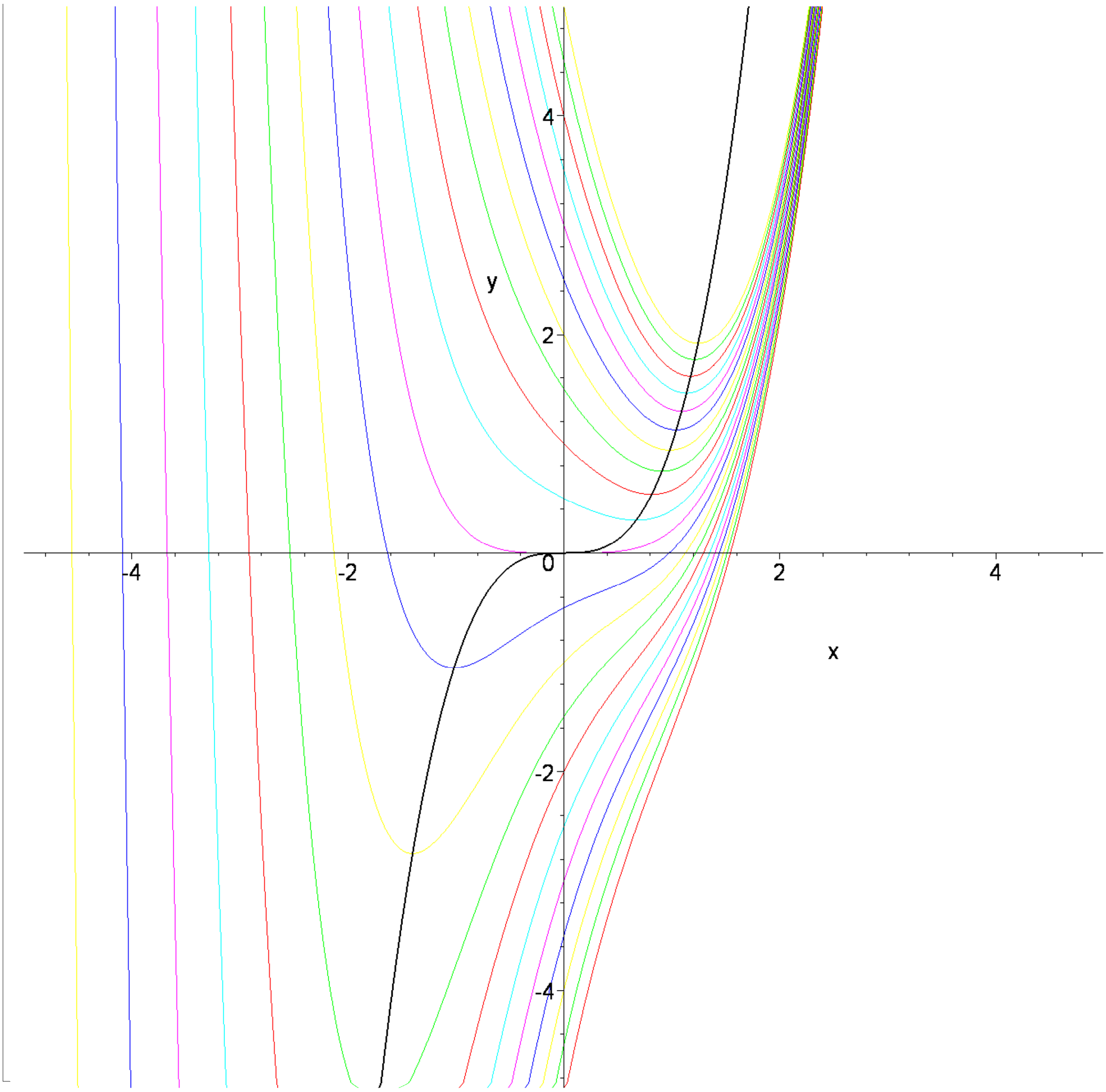
```
> Eq1:=subs(diff(y(x),x)=0,Eq);  # On crée une nouvelle équation
  en remplaçant y'(x) par 0
  TH:=solve(Eq1,y(x));           # On détermine la valeur de y(x)
  lorsque y'(x)=0
```

$$Eq1 := y(x) = x^3$$

$$TH := x^3$$

3)b)

```
> graphe2:=plot(TH,x=-5..5,y=-5..5,color=black,thickness=2,numpoin
  ts=300):
  display({graphe1,graphe2});
```



4)a)

```
> Eqp:=diff(Eq,x);                          # On dérive l'équation.
  Eq2:=subs(diff(y(x),x$2)=0,Eqp);  # On remplace y''(x) par 0
  dans l'équation Eqp
  yprime:=solve(Eq2,diff(y(x),x));  # On détermine la valeur de
  y'(x) lorsque y''(x)=0
```

$$Eqp := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 3\,x^2$$

$$Eq2 := \frac{d}{dx}\,y(x) = 3\,x^2$$

$$yprime := 3\,x^2$$

4)b)

```
> Eq3:=subs(diff(y(x),x)=yprime,Eq);  # On remplace y'(x) par la
  valeur trouvée précédemment
```

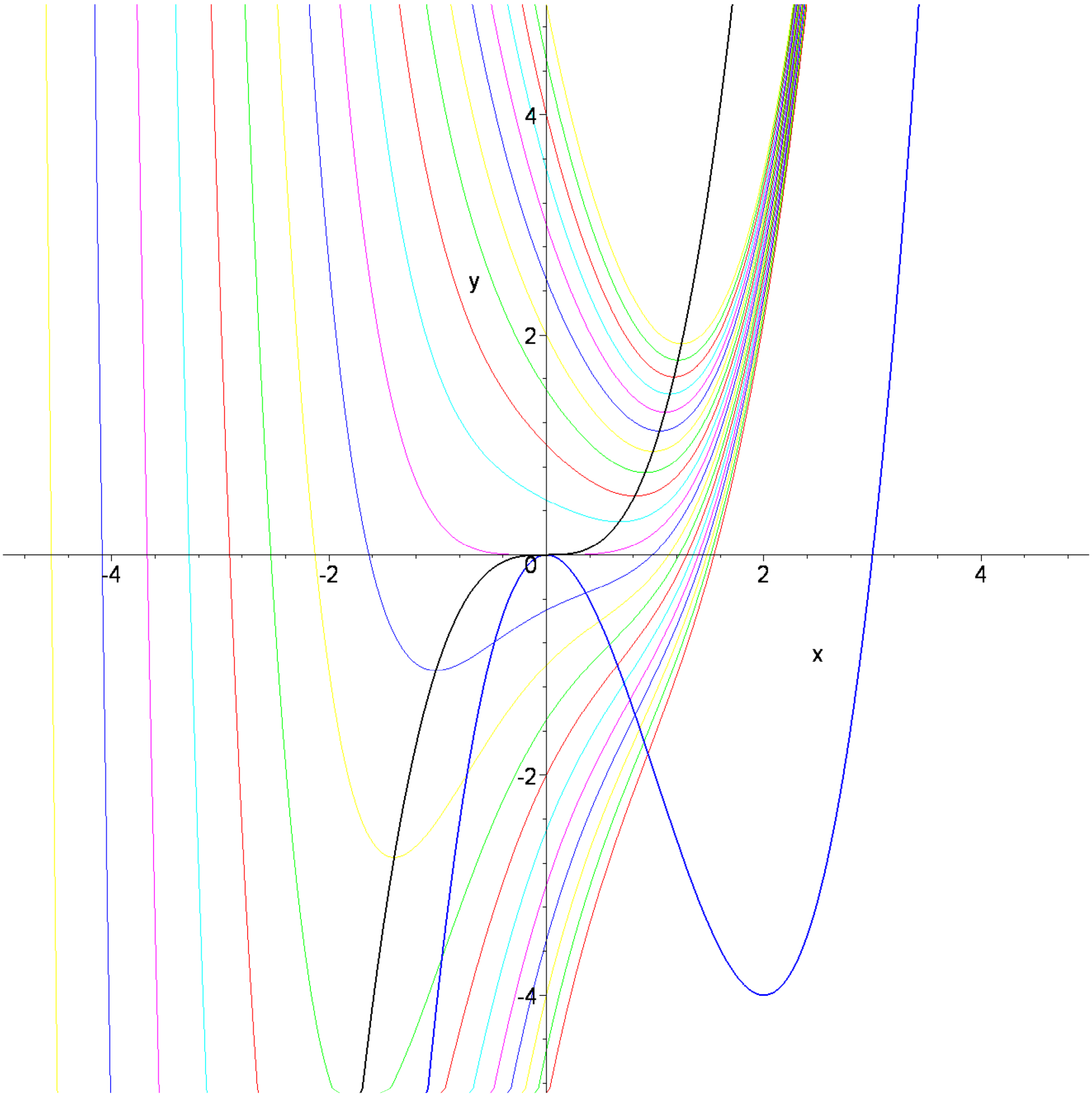
```
TI:=solve(Eq3,y(x));
```

$$Eq3 := 3\,x^2 + \mathrm{y}(x) = x^3$$

$$TI := -3\,x^2 + x^3$$

4)c)

```
> graphe3:=plot(TI,x=-5..5,y=-5..5,color=blue,thickness=2,numpoint
  s=300):
  display({graphe1,graphe2,graphe3});
```



IV- Généralisation

Nos commandes précédentes sont indépendantes de l'équation de départ. Il nous suffit de les recopier et de les incorporer dans les procédures.

1)a)

```
> graphe1:=proc(Eq,x0)
          local Sol,L;
  Sol:=rhs(dsolve({Eq,y(x0)=a/2},y(x)));
```

```
L:=[seq(eval(Sol),a=-10..10)];          # Nous ajoutons la
commande eval pour forcer Maple à évaluer la valeur de la
variable Sol
plot(L,x=-5..5,y=-5..5);
end;
```

graphe1 := **proc**(*Eq*, *x0*)

local *Sol*, *L*;

Sol := rhs(dsolve({*Eq*, y(*x0*) = *a* / 2}, y(*x*)));

L := [seq(eval(*Sol*), *a* = -10 .. 10)];

plot(*L*, *x* = -5 .. 5, *y* = -5 .. 5)

end proc

1)b)

```
> graphe2:=proc(Eq)
           local Eq1,TH;
Eq1:=subs(diff(y(x),x)=0,Eq);
TH:=solve(Eq1,y(x));
plot(TH,x=-5..5,y=-5..5,color=black,thickness=2);
end;
```

graphe2 := **proc**(*Eq*)

local *Eq1*, *TH*;

Eq1 := subs(diff(y(*x*), *x*) = 0, *Eq*);

TH := solve(*Eq1*, y(*x*));

plot(*TH*, *x* = -5 .. 5, *y* = -5 .. 5, *color* = *black*, *thickness* = 2)

end proc

1)c)

```
> graphe3:=proc(Eq)
           local Eqp,Eq2,yprime,Eq3,TI;
Eqp:=diff(Eq,x);
Eq2:=subs(diff(y(x),x$2)=0,Eqp);
yprime:=solve(Eq2,diff(y(x),x));
Eq3:=subs(diff(y(x),x)=yprime,Eq);  # On remplace y'(x) par la
valeur trouvée précédemment
TI:=solve(Eq3,y(x));
plot(TI,x=-5..5,y=-5..5,color=blue,thickness=2);
end;
```

graphe3 := **proc**(*Eq*)

local *Eqp*, *Eq2*, *yprime*, *Eq3*, *TI*;

Eqp := diff(*Eq*, *x*);

Eq2 := subs(diff(y(*x*), *x* \$ 2) = 0, *Eqp*);

yprime := solve(*Eq2*, diff(y(*x*), *x*));

Eq3 := subs(diff(y(*x*), *x*) = *yprime*, *Eq*);

TI := solve(*Eq3*, y(*x*));

$\text{plot}(TI, x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, color = blue, thickness = 2)$

end proc

1)d)

```
> graphe:=proc(Eq,x0)
          local G1,G2,G3;
  G1:=graphe1(Eq,x0);
  G2:=graphe2(Eq);
  G3:=graphe3(Eq);
  display(G1,G2,G3);
  end;
```

graphe := **proc**(*Eq*, *x0*)

local *G1*, *G2*, *G3*;

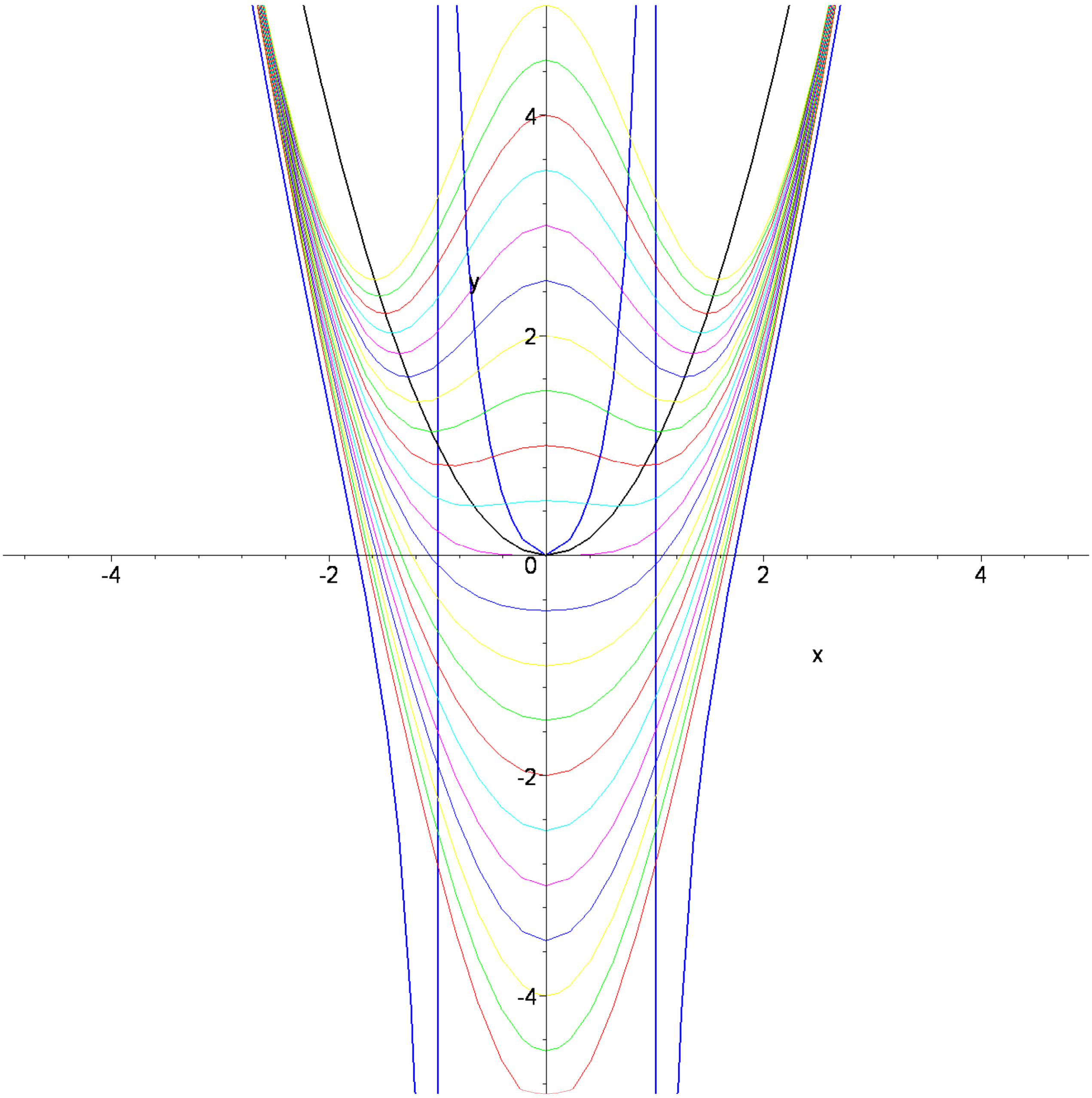
$G1 := \text{graphe1}(Eq, x0)$; $G2 := \text{graphe2}(Eq)$; $G3 := \text{graphe3}(Eq)$; $\text{display}(G1, G2, G3)$

end proc

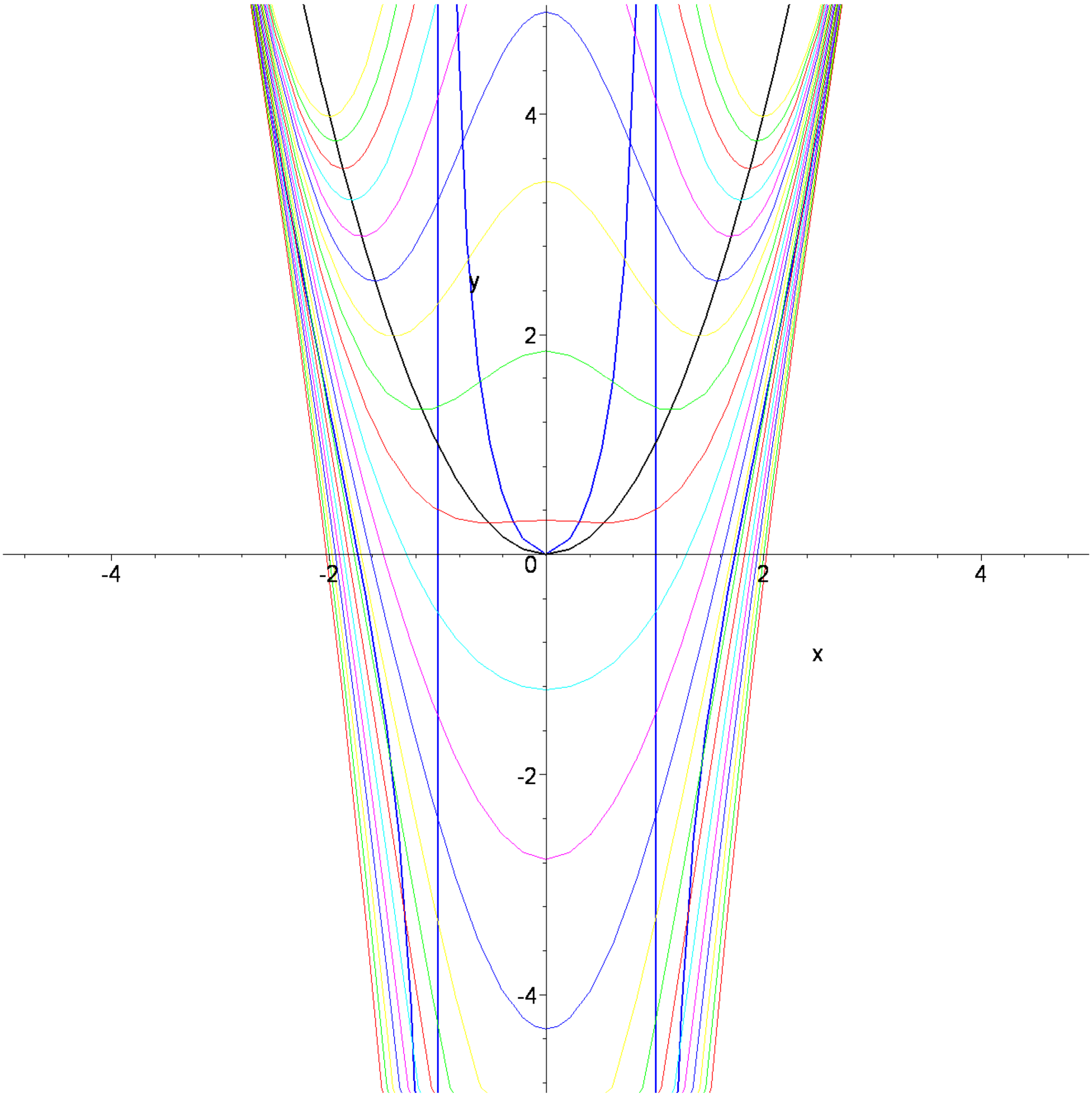
2)a)

```
> Eq:=diff(y(x),x)+x*y(x)=x^3;
  graphe(Eq,0);
  graphe(Eq,1.5);   # En se plaçant en 1.5, on observe des
  comportements plus variés pour les solutions de l'équation.
```

$$Eq := \left(\frac{d}{dx}\,\text{y}(x)\right) + x\,\text{y}(x) = x^3$$



y
4
2
0
-2
-4
-4
-2
2
4
x

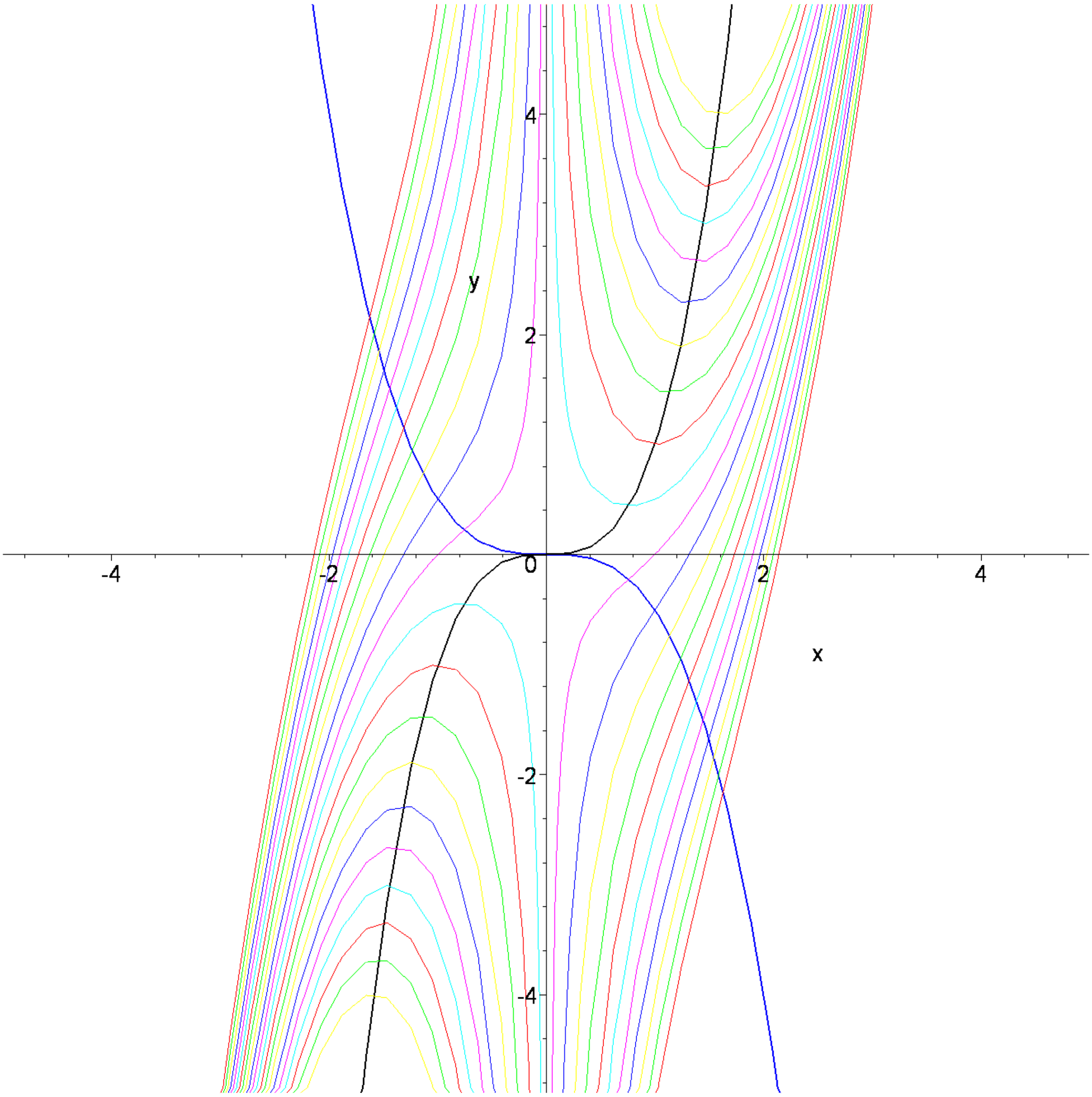


2)b)

Dans ce cas, les intervalles de résolution de l'équation sont]-oo,0[et]0,+oo[. On se place donc en 1. Les expressions trouvées fonctionnent également sur]-oo,0[.

```
> Eq:=x*diff(y(x),x)+y(x)=x^3;
  graphe(Eq,1);
```

$$Eq := y(x) + x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = x^3$$

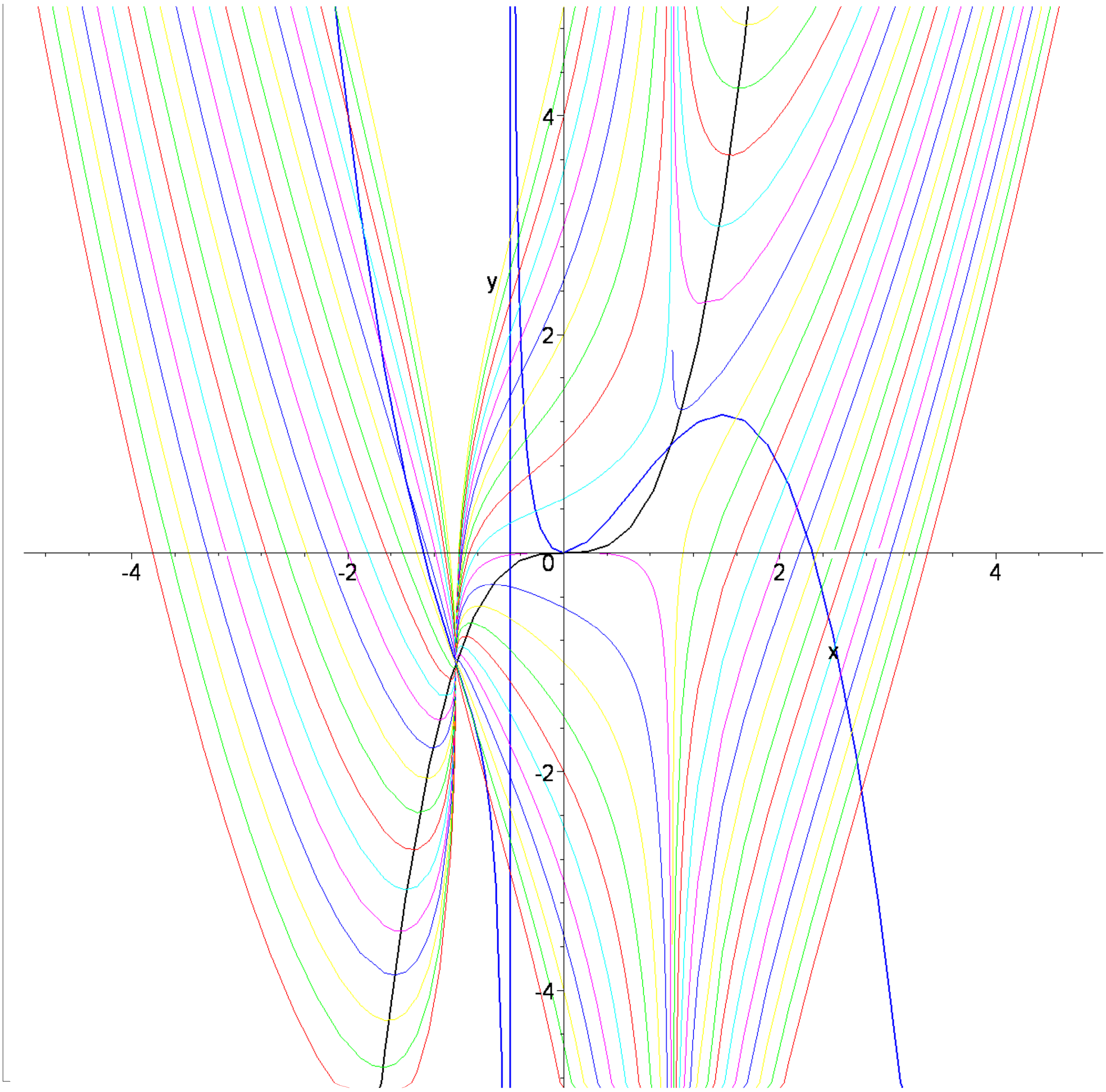


3)b)

Les intervalles de résolution de cette équation sont]-oo,-1[,]-1,1[et]1,+oo[. Cette fois, les solutions trouvées par Maple ne sont définies que sur leurs intervalles respectifs. Nous traçons les solutions pour chacun de ces intervalles.

```
> Eq:=(x^2-1)*diff(y(x),x)+y(x)=x^3;
  G11:=graphe1(Eq,2):
  G12:=graphe1(Eq,0):
  G13:=graphe1(Eq,-2):
  G2:=graphe2(Eq):
  G3:=graphe3(Eq):
  display({G11,G12,G13,G2,G3});
```

$$Eq := (-1 + x^2)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + y(x) = x^3$$



V- Pour aller plus loin...

Dans cette partie, les équations ne sont pas linéaires.

1)

```
> Eq:=diff(y(x),x)+y(x)^2=x^3;
  graphe2(Eq);
  graphe3(Eq);
```

$$Eq := \left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right) + \mathrm{y}(x)^2 = x^3$$

```
Error, (in plot) invalid arguments

Error, (in plot) invalid arguments
```

2-3)

Faisons les calculs "à la main".

```
> Eq1:=subs(diff(y(x),x)=0,Eq);
```

```
solve(Eq1,y(x));
```

$$Eq1 := y(x)^2 = x^3$$

$$x^{(3/2)}, -x^{(3/2)}$$

Il y a deux solutions proposées. Il faut en tenir compte dans la procédure graphe2. En mettant entre crochets la solutions précédente, cela suffira pour éviter une erreur avecla commande "plot".

```
> graphe2:=proc(Eq)
           local Eq1,TH;
  Eq1:=subs(diff(y(x),x)=0,Eq);
  TH:=solve(Eq1,y(x));
  plot([TH],x=-5..5,y=-5..5,color=black,thickness=2,numpoints=300)
  ;
  end;
```

graphe2 := **proc**(*Eq*)

local *Eq1*, *TH*;

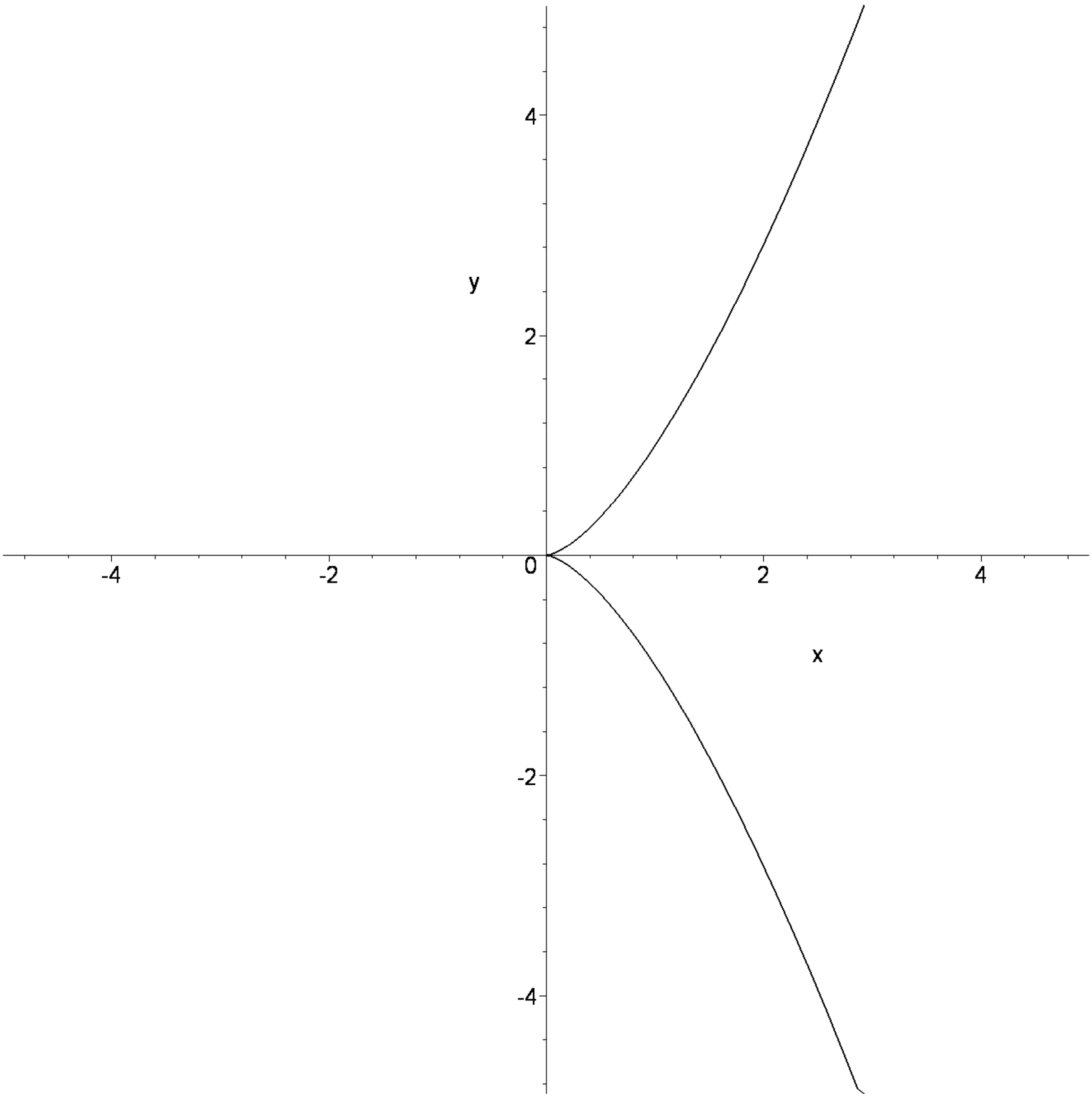
$Eq1 := \mathrm{subs}(\mathrm{diff}(\mathrm{y}(x), x) = 0, Eq)$;

$TH := \mathrm{solve}(Eq1, \mathrm{y}(x))$;

$\mathrm{plot}([TH], x = \text{-}5 .. 5, y = \text{-}5 .. 5, color = black, thickness = 2, numpoints = 300)$

end proc

```
> graphe2(Eq);
```



Faisons la même chose pour graphe3 :

```
> Eqp:=diff(Eq,x);
  Eq2:=subs(diff(y(x),x$2)=0,Eqp);
  yprime:=solve(Eq2,diff(y(x),x));
  Eq3:=subs(diff(y(x),x)=yprime,Eq);  # On remplace y'(x) par la
  valeur trouvée précédemment
  TI:=solve(Eq3,y(x));
```

$$Eqp := \left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) + 2\,\mathrm{y}(x)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) = 3\,x^2$$

$$Eq2 := 2\,\mathrm{y}(x)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) = 3\,x^2$$

$$yprime := \frac{3}{2}\,\frac{x^2}{\mathrm{y}(x)}$$

$$Eq3 := \frac{3}{2}\frac{x^2}{y(x)} + y(x)^2 = x^3$$

$$TI := \frac{(-162\,x^2 + 6\sqrt{-48\,x^9 + 729\,x^4}\,)^{(1/3)}}{6} + \frac{2\,x^3}{(-162\,x^2 + 6\sqrt{-48\,x^9 + 729\,x^4}\,)^{(1/3)}},$$
$$-\frac{(-162\,x^2 + 6\sqrt{-48\,x^9 + 729\,x^4}\,)^{(1/3)}}{12} - \frac{x^3}{(-162\,x^2 + 6\sqrt{-48\,x^9 + 729\,x^4}\,)^{(1/3)}}$$
$$+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{(-162\,x^2 + 6\sqrt{-48\,x^9 + 729\,x^4}\,)^{(1/3)}}{6} - \frac{2\,x^3}{(-162\,x^2 + 6\sqrt{-48\,x^9 + 729\,x^4}\,)^{(1/3)}}\right),$$
$$-\frac{(-162\,x^2 + 6\sqrt{-48\,x^9 + 729\,x^4}\,)^{(1/3)}}{12} - \frac{x^3}{(-162\,x^2 + 6\sqrt{-48\,x^9 + 729\,x^4}\,)^{(1/3)}}$$
$$-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\left(\frac{(-162\,x^2 + 6\sqrt{-48\,x^9 + 729\,x^4}\,)^{(1/3)}}{6} - \frac{2\,x^3}{(-162\,x^2 + 6\sqrt{-48\,x^9 + 729\,x^4}\,)^{(1/3)}}\right)$$

Le problème est le même que pour graphe2 dans cet exemple. Cependant, remarquons que la résolution de yprime pourrait générer plusieurs solutions. Nous en tenons compte dans la solution suivante :

```
> graphe3:=proc(Eq)
           local Eqp,Eq2,yprime,Eq3,TI,yp;
  Eqp:=diff(Eq,x);
  Eq2:=subs(diff(y(x),x$2)=0,Eqp);
  yprime:={solve(Eq2,diff(y(x),x))};
  TI:=NULL;
  #  Nous ajoutons les solutions une par une en générant une
  séquence TI
  for yp in yprime do
      Eq3:=subs(diff(y(x),x)=yp,Eq);
      TI:=TI,solve(Eq3,y(x));
  od;
  plot([TI],x=-5..5,y=-5..5,color=blue,thickness=2,numpoints=300);

  end;
```

graphe3 := **proc**(*Eq*)

local *Eqp*, *Eq2*, *yprime*, *Eq3*, *TI*, *yp*;

$Eqp := \mathrm{diff}(Eq, x)$;

$Eq2 := \mathrm{subs}(\mathrm{diff}(y(x), x\,\$\,2) = 0, Eqp)$;

$yprime := \{\mathrm{solve}(Eq2, \mathrm{diff}(y(x), x))\}$;

$TI := NULL$;

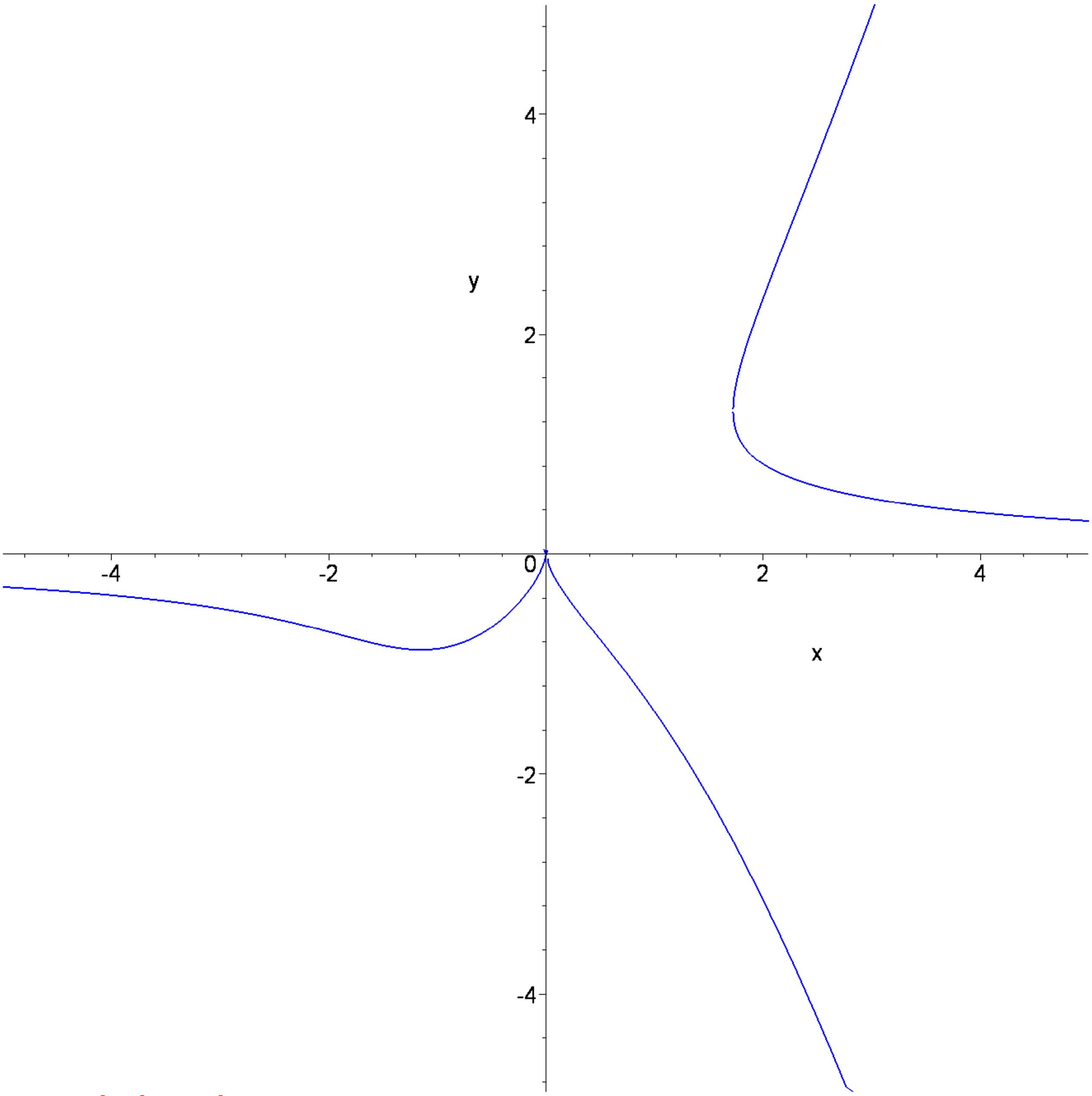
for *yp* **in** *yprime* **do** $Eq3 := \mathrm{subs}(\mathrm{diff}(y(x), x) = yp, Eq)$; $TI := TI, \mathrm{solve}(Eq3, y(x))$

end do;

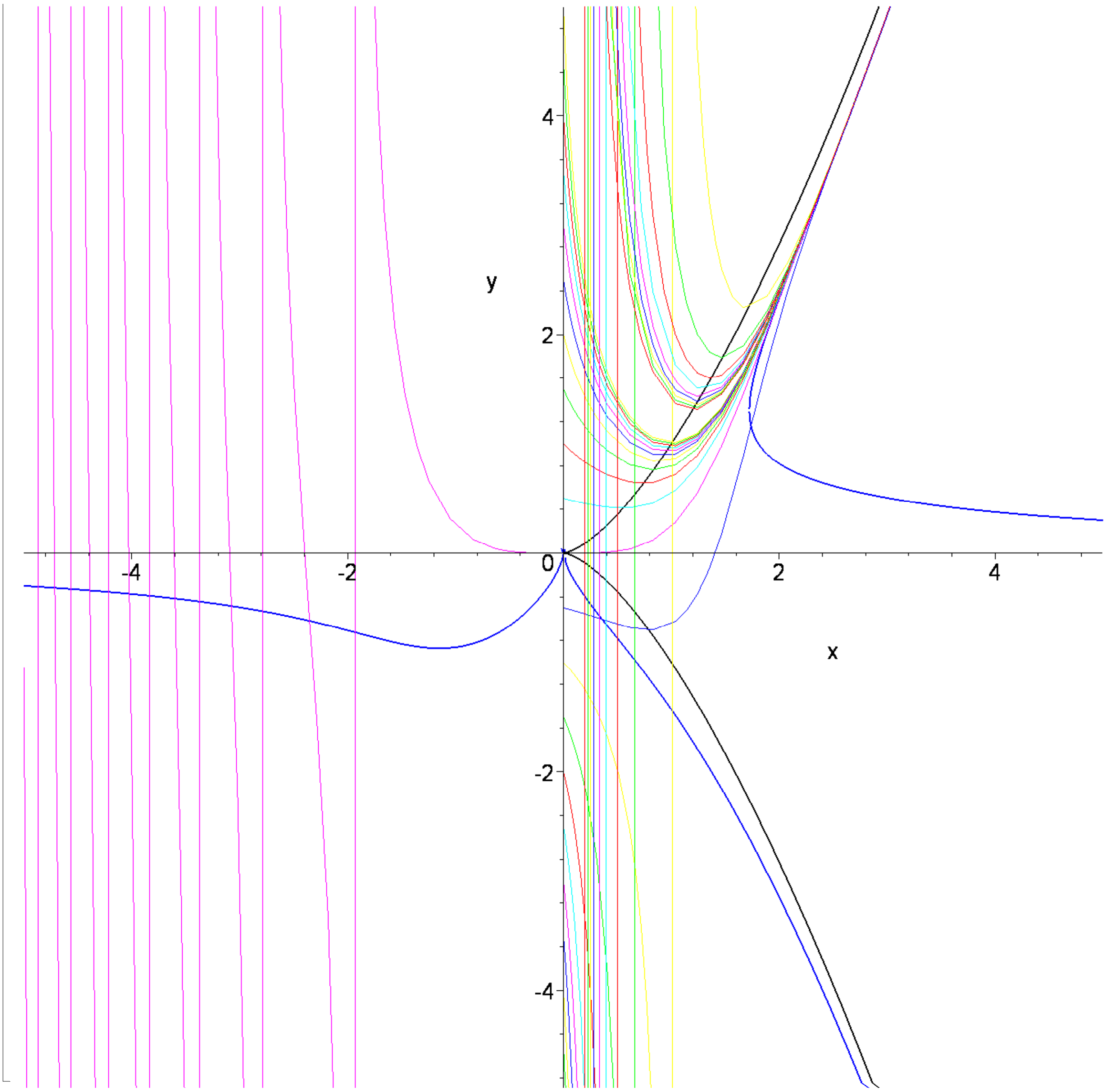
plot([TI], $x = -5 .. 5$, $y = -5 .. 5$, $color = blue$, $thickness = 2$, $numpoints = 300$)

end proc

```
> graphe3(Eq);
```




```
> graphe(Eq,0);
```


y
4
2
-2
-4
-4
-2
0
2
4
x

>