Programme de colles de la semaine n°12

1 Consignes

Nous continuons l'étude de la géométrie dans l'espace. On attend une maîtrise des notions de repères, des produits scalaire, vectoriel et mixte, le calcul et l'exploitation des équations de plans, droites et sphères...
Nous ajoutons les comparaisons de fonctions. Vous devez connaitre les équivalents usuels et les comparaisons de fonctions usuelles du formulaire. Vous devez également être capable de calculer des limites à l'aide d'équivalents.

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.
Analyse-Chapitre 4 : Relations de comparaisons de fonctions
(notion de propriétés vérifiées par une fonction au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$)
I- Voisinage
(définition d'un voisinage)
II- Fonctions négligeables
(définition, caractérisation fondamentale par la limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, exemples usuels (puissance de x, reformulation des croissances comparées), transivité, opérations élémentaires (combinaisons linéaires, produits, inversion), composition à droites)
III- Fonctions dominées
(définition, caractérisation fondamentale par le caractère borné de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, transivité, opérations élémentaires (combinaisons linéaires, produits, inversion), composition à droites, lien entre $\underset{x\to a}{o}$ et $\underset{x\to a}{O}$)
IV- Fonctions équivalentes
IV-1 Propriétés fondamentales
(définition, caractérisation fondamentale par la limite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\underset{x\to a}{\sim}$ est une relation d'équivalence, lien avec $\underset{x\to a}{o}$, opérations élémentaires (produits, fractions, puissances, composition à droite, opérations sommatoires **avec toutes les précautions nécessaires**)
IV-2 Lien avec les limites
(deux fonctions équivalentes ont même limite, une fonction ayant une limite réelle et non nulle est équivalente à sa limite, "si $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$", équivalents usuels)

3 Démonstrations

1. Transitivité de $\underset{x\to a}{o}$
2. Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors :
   (a) Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors : $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} (\alpha+\beta) g(x)$
   (b) Si $\alpha + \beta = 0$, alors : $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$
3. Si $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$.

4 Exercices traités en cours

Feuille 7 : Exercice 1 (1,2,4), Exercice 2, Exercice 3 (1,2,3,4,5,6), Exercice 5, Exercice 6, Exercice 7, Exercice 9, Exercice 10
Feuille 8 : Exercice 2, Exercice 4, Exercice 5 (1,2,5,6,9,10,13), Exercice 6 (1,2,5,8,9,11,14,17), Exerice 9, Exercice 10 (2,5,14,17)