
Programme de colles de la semaine n°13

1 Consignes

Nous continuons l'étude des comparaisons de fonctions. Vous devez connaître les équivalents usuels et les comparaisons de fonctions usuelles du formulaire. Vous devez également être capable de calculer des limites à l'aide d'équivalents.

Nous ajoutons cette semaine la théorie des ensembles, les applications et les relations binaires. Vous devez maîtriser les définitions des différentes notions ensemblistes. En particulier, vous devez savoir établir l'égalité ou l'inclusion de deux ensembles.

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.

Chap 0 - Fondements des mathématiques

II- Un peu de théorie des ensembles

II-1 Relations entre ensembles

II-1-a) Inclusion

(définition de l'inclusion, ensemble des parties, propriétés élémentaires (négation, transitivité...))

II-1-b) Égalité

(définition, principe de double inclusion)

II-2 Opérations sur les ensembles

Notation : $\{x \in E / P(x)\}$ où P est un prédicat sur E .

II-2-a) Union, intersection...

(union et intersection de deux ensembles, $A \setminus B$, différence symétrique...)

II-2-b) Complémentaire

(définition, notation $\complement_E A$, complémentaire du complémentaire, complémentaire de l'union, de l'intersection...)

II-2-c) Familles d'ensembles

(définition, union et intersection d'une famille d'ensemble...)

II-2-d) Produit d'ensembles

(définition)

III-Applications

III-1 Définition

(définition d'une application, image et antécédent d'un élément, égalité d'application, restriction et prolongement, composée, associativité de la composition)

III-2 Image directe et réciproque d'une partie

III-2-a) Image directe

(définition, image directe de l'union et de l'intersection de deux parties)

III-2-b) Image réciproque

(définition, image réciproque de l'union et de l'intersection de deux parties, image réciproque du complémentaire d'une partie)

III-3 Injections, surjections et bijections

III-3-a) Injection

(définition, caractérisation de l'injectivité)

III-3-b) Surjection

(définition, caractérisation de la surjectivité)

III-3-c) Bijection

(définition, caractérisation de la bijectivité, f est bijective si, et seulement si, f est injective et surjective, application réciproque d'une application bijective, propriété 4)

IV-Relation d'ordre

IV-1 Relation binaire

(définition d'une relation et de leurs propriétés usuelles (réflexivité, transitivité, symétrie, antisymétrie, caractère total), définition d'une relation d'ordre et d'une relation d'équivalence)

IV-2 Majorant, Minorant

(définition)

IV-3 Maximum, Minimum

(définition, unicité)

3 Démonstrations

1. Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors :
 - (a) Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors : $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} (\alpha + \beta)g(x)$
 - (b) Si $\alpha + \beta = 0$, alors : $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) = \underset{x \rightarrow a}{o}(g(x))$
2. Si $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$.
3. Formule du complémentaire de l'union de deux ensembles.
4. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles de E .
Alors, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
Contre-exemple de l'inclusion réciproque.

4 Exercices traités en cours

Feuille 8 : Exercice 2, Exercice 4, Exercice 5 (1,2,5,6,9,10,13), Exercice 6 (1,2,5,8,9,11,14,17), Exercice 9, Exercice 10 (2,5,14,17)

Feuille 0 (Partie II) : Exercice 2, Exercice 3, Exercice 9(3,4,5), Exercice 10, Exercice 11, Exercice 12, Exercice 16, Exercice 19 (1)