
Programme de colles de la semaine n°14

1 Consignes

Nous continuons la théorie des ensembles, les applications et les relations binaires. Vous devez maîtriser les définitions des différentes notions ensemblistes et les propriétés des applications. En particulier, vous devez savoir établir l'égalité ou l'inclusion de deux ensembles.

Nous ajoutons cette semaine l'étude des nombres entiers. Vous devez impérativement savoir mener un raisonnement par récurrence et les formules classiques de sommes et de produits. On appréciera la capacité à interpréter certaines formules sommatoires en terme de dénombrement.

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.

I- Ensemble des nombres entiers

I-1 Propriétés fondamentales

(axiomatique de $\mathbb{N}$, successeur, prédécesseur...)

I-2 Principe de récurrence

(récurrence simple, forte, double, finie(ascendante et descendante), ..., exemples)

II- Applications du principe de récurrence

II-1 Suite définie par récurrence

(suite de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : E \longrightarrow E$, application pratique : notion d'ensemble f -stable, suite de la forme : $u_{n+p} = f_n(u_n, \dots, u_{n+p-1})$ où $f_n : E^p \longrightarrow E$, exemples)

II-2 Symbole de sommation et de produit

II-2-a) Définition

(définitions par récurrence, notation : $\sum_{1 \leq k \leq n} a_k$, $\sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} a_k$ et leurs généralisations : $\sum_{1 \leq k \leq n, P(k)} a_k$, $\sum_{k \in A} a_k \dots$)

II-2-b) Règles de calculs

(combinaison linéaire, "fausse" relation de Chasles, réindexations, exemples)

(Les formules classiques ont été formulées dans le formulaire de calcul)

III- Ensembles finis

III-1 Définition

(définition d'un ensemble fini et de son cardinal)

III-2 Propriétés fondamentales

(sous-ensemble d'un ensemble fini, application injective, surjective ou bijective entre deux ensembles de même cardinal, sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$)

III-3 Opérations ensemblistes

(cardinal de l'union de deux ensembles, du complémentaire d'un ensemble, d'un produit d'ensembles finis...)

IV- Dénombrement

IV-1 Ensembles d'applications

(cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis, de l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$)

IV-2 Ensembles d'ensembles

(cardinal de $\mathcal{P}(E)$, définition de $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, formule du triangle de Pascal, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ (in-

terprétation en terme de dénombrement de ces formules), formule de $\binom{n}{k}$, formule du binôme de Newton)

3 Démonstrations

1. Formule du complémentaire de l'union de deux ensembles.
2. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles de E .
Alors, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
Contre-exemple de l'inclusion réciproque.
3. Formule du binôme de Newton.

4 Exercices traités en cours

Feuille 0 (Partie II) : Exercice 2, Exercice 3, Exercice 9(3,4,5), Exercice 10, Exercice 11, Exercice 12, Exercice 16, Exercice 19 (1)

Feuille 9 : Exercice 1, Exercice 2, Exercice 3 (1), Exercice 5, Exercice 6 (1,2), Exercice 7 (1), Exercice 8 (4), Exercice 10, Exercice 11 (1,2), Exercice 12, Exercice 14