
Programme de colles de la semaine n°15

1 Consignes

Nous continuons l'étude des nombres entiers. Vous devez impérativement savoir mener un raisonnement par récurrence et les formules classiques de sommes et de produits. On appréciera la capacité à interpréter certaines formules sommatoires en terme de dénombrement.

Nous ajoutons cette semaine l'étude des développements limités. Une connaissance parfaite des développements limités usuels du formulaire est attendue. Vous devez également savoir énoncer parfaitement le théorème de Taylor-Young. Vous devez savoir calculer des développements limités de fonctions et d'en déduire l'étude locale d'une fonction ou d'une courbe.

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.

Analyse-Chapitre 5 : Développements limités

I- Définition

(Définition, parties régulière et principale d'un développement limité, principe de troncature, une fonction est équivalente au terme principal de son développement limité)

II- Régularité

II-1 Limites et continuité

(caractérisation d'une limite et de la continuité à l'aide d'un développement limité, application au prolongement par continuité)

II-2 Dérivabilité - dérivée

(caractérisation de la dérivabilité et de la dérivée à l'aide d'un développement limité, développement limité d'une dérivée (avec les précautions nécessaires et avec contre-exemple sans ces précautions))

II-3 Primitives

(Intégration des développements limités)

III- Théorème de Taylor-Young - Développements limités usuels

III-1 Dérivées successives

(définition de la dérivée $n^{\text{ème}}$, fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et de $\mathcal{C}^\infty$)

III-2 Théorème de Taylor-Young

(polynôme et reste de Taylor, Théorème de Taylor-Young)

IV- Opérations sur les développements limités

IV-1 Addition

(addition des développements limités)

IV-2 Multiplication

(multiplication des développements limités, exemples de gain d'ordre par produit)

IV-3 Composition

(composition des développements limités, exemples de gain d'ordre par composition)

IV-4 Division

(division des développements limités à l'aide du développement limité de $\frac{1}{1+x}$)

V- Application des développements

V-1 Généralisation

(Définition d'un développement asymptotique, développements limités généralisés (vu comme cas particulier d'un développement asymptotique), seuls des exemples ont été traités)

V-2 Calculs de limites

(exemples)

V-3 Étude locale d'une fonction

V-3-a) Étude locale de la position relative à la tangente

(Caractérisation à l'aide d'un développement limité, exemple)

V-3-b) Étude locale d'une asymptote

(Caractérisation à l'aide d'un développement limité généralisé, exemple)

V-4 Étude locale d'une courbe

(entier caractéristique, allure locale d'une courbe, exemple)

3 Démonstrations

1. Formule du binôme de Newton.
2. Développement limité de $\frac{1}{1-x}$ à l'aide d'une somme de termes d'une suite géométrique. Application au calcul du développement limité de $\ln(1+x)$.
3. Développement limité de $\cos(x)$.

4 Exercices traités en cours

Feuille 9 : Exercice 1, Exercice 2, Exercice 3 (1), Exercice 5, Exercice 6 (1,2), Exercice 7 (1), Exercice 8 (4), Exercice 10, Exercice 11 (1,2), **Feuille n°10 :** Exercice 1 (1,2,4,6,12,14), Exercice 2, Exercice 4(3), Exercice 5, Exercice 8 (2,3), Exercice 9, Exercice 10 (2,3), Exercice 11, Exercice 13, Exercice 14 (1,4,9), Exercice 15 (2,4,5)