Programme de colles de la semaine n°16

1 Consignes

Nous continuons l'étude des développements limités. Une connaissance parfaite des développements limités usuels du formulaire est attendue. Vous devez également savoir énoncer parfaitement le théorème de Taylor-Young. Vous devez savoir calculer des développements limités de fonctions et d'en déduire l'étude locale d'une fonction ou d'une courbe.

Nous ajoutons cette semaine l'étude des structures algébriques. Vous devez savoir établir si un ensemble muni d'une ou deux lois est un groupe, un anneau, un corps... Vous devez connaître les notions de morphismes et leurs propriétés usuelles... Ce chapitre inclut également quelques notions d'arithmétique. Les applications de l'ensemble de ces notions se limitera à des applications élémentaires (*Cf.* exercices de TD).

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.

Alg-Chap 5 - Structures algébriques usuelles

I- Loi de composition interne

I-1 Définitions.

(définition d'une loi de composition interne, exemples)

I-2 Vocabulaire

(associativité, commutativité, élément neutre, inverse, distributivité...)

I-3 Premières propriétés

(unicité de l'élément neutre, unicité de l'inverse pour une loi associative)

II- Groupes

II-1 Définitions

(définition d'un groupe, d'un groupe commutatif, de x^n ...)

II-2 Sous-groupes

(définitions, intersection de sous-groupes...)

II-3 Morphisme de groupes

II-3-a) Définitions et premières propriétés

(définitions(morphisme, isomorphisme, endomorphisme, automorphisme), image du neutre, image de l'inverse,...)

II-3-b) Image et noyau

(définition, $\ker(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$ sont des sous-groupes, φ est injective si et seulement si, $\ker(\varphi)$ est réduit au neutre)

III Anneaux et corps

III-1 Structure d'anneaux

III-1-a) Définitions

(définition d'un anneau, anneau commutatif, anneau intègre, exemples...)

III-1-b) Règles de calculs

($0_A * x = x * 0_A = 0_A$, $(-x) * y = x * (-y) = -(x * y)$, binôme de Newton et factorisation de $x^n - y^n$ dans un anneau commutatif)

III-1-c) Sous-anneaux

(définition, intersection de sous-anneau)

III-2 Structure de corps

(définition d'un corps (commutatif))

IV Arithmétique élémentaire dans l'anneau des entiers relatifs

(propriété caractéristique de $\mathbb{Z}$: toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum, toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un minimum, une partie de $\mathbb{Z}$ admet un nombre fini d'élément si, et seulement, si elle est bornée)

IV-1 Divisibilité

(définition, propriétés élémentaires...)

IV-2 Division euclidienne

(définition, caractérisation de la divisibilité)

IV-3 Nombres premiers

(définition, décomposition en facteurs premiers, nombres premiers entre eux, lemme de Gauss, lemme d'Euclide)

3 Démonstrations

1. Développement limité de $\frac{1}{1-x}$ à l'aide d'une somme de termes d'une suite géométrique. Application au calcul du développement limité de $\ln(1+x)$.
2. Développement limité de $\cos(x)$.
3. Unicité du symétrique
4. Image du neutre et d'un symétrique par un morphisme de groupe.
5. L'image d'un morphisme de groupes est un sous-groupe.

4 Exercices traités en cours

Feuille n°10 : Exercice 1 (1,2,4,6,12,14), Exercice 2, Exercice 4(3),Exercice 5, Exercice 8 (2,3), Exercice 9, Exercice 10 (2,3), Exercice 11, Exercice 13, Exercice 14 (1,4,9), Exercice 15 (2,4,5)

Feuille n°11 : Exercice 1, Exercice 3, Exercice 4, Exercice 5, Exercice 7(1,2), Exercice 8, Exercice 13, Exercice 14