Lycée Gustave Eiffel — Année 2011-2012
PTSI 2 — 6 février au 10 février 2012

Programme de colles de la semaine n°17

1 Consignes

Nous continuons cette semaine l'étude des structures algébriques. Vous devez savoir établir si un ensemble muni d'une ou deux lois est un groupe, un anneau, un corps... Vous devez connaître les notions de morphismes et leurs propriétés usuelles... Ce chapitre inclus également quelques notions d'arithmétique. Les applications de l'ensemble de ces notions se limitera à des applications élémentaires (*Cf.* exercices de TD).
Nous ajoutons cette semaine l'étude des nombres réels et des suites réelles. Vous devez savoir établir des inégalités, étudier des exepressions faisant apparaître des parties entières, calculer des bornes supérieures et inférieures... Concernant les suites, vous devez savoir établir la convergence ou la divergence d'une suite.
N.B. : La connaissance des propriétés des suites arithmétiques et géométrique est bien entendu un prérequis.

2 Plan du cours

Le programme de cette semaine s'ajoute à celui de la semaine précédente.
Analyse-chapitre 5 : Nombres réels - Suites de nombres réels
I- Corps des nombres réels
I-1 Propriétés fondamentales
($\mathbb{R}$ est un corps ordonné)
I-2 Valeurs absolues
(définition, inégalité triangulaire, distance entre deux réels)
I-3 $\mathbb{R}$ est un corps archimédien
(énoncé du caractère archimédien, partie entière d'un nombre réel, densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
I-4 Propriétés de la borne supérieure
(définition des bornes supérieure et inférieure, caractérisation de la borne supérieure (en particulier, caractérisation par ϵ), énoncé de la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, droite numérique achevée, généralisation de la borne supérieure à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}$.)
I-5 Intervalles
(caractérisation des intervalles)
II-Suites de nombres réels
II-1 Vocabulaire relatif aux suites
(définition d'une suite, notion de propriété vérifiée à partir d'un certain rang)
II-1-a) Suites bornées - Relation d'ordre
(suite majorée, suite minorée, suite bornée)
II-1-b) Suites monotones.
(suite croissante, suite décroissante, suite monotone, quelques caractérisations...)
II-2 Suites convergentes
II-2-a) Définitions
(définition de la limite d'une suite, unicité de la limite, suite convergente,...)
II-2-b) Premières propriétés - Inégalités
("une suite convergente est bornée", "si (u_n) converge vers $l > 0$, alors (u_n) est positive à partir d'un certain rang", conservation des inégalités larges par passage à la limite, théorème des gendarmes)
II-2-c) Opérations sur les limites
(somme, produit, quotient, ...)
II-2-d) Suites extraites
(définition, "toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite", "si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite alors (u_n) converge vers cette limite")
II-3 Suites divergeant vers $+\infty$ et $-\infty$
II-3-a) Définitions
(définitions)
II-3-b) Premières propriétés - Inégalités
("une suite qui diverge vers $\pm\infty$ n'est pas bornée", "$u_n \leq v_n$ et u_n diverge vers $+\infty$, alors v_n diverge vers $+\infty$",...)
II-3-c) Opérations sur les suites divergentes
(sommes, produits, quotients avec des suites convergentes, somme avec une suite minorée, produits avec une suite minorée par une constante strictement positive...)

II-3-d) Suites extraites
(Toute suites extraites d'une suite divergeant vers $+\infty$ diverge vers $+\infty$.)
II-4 Théorème généraux d'existence de limites
II-4-a) Convergence des suites monotones
(Une suite croissante converge si, et seulement si, elle est majorée. Dans tous les cas, sa limite est la borne supérieure des termes de la suite. Résultats analogue dans le cas décroissant)
II-4-b) Suites adjacentes
(Définition, inégalité entre deux suites adjacentes, théorème des suites adjacentes, théorèmes des segments emboités)
II-4-c) Rapport de termes consécutifs
(Limite du rapport d'une suite convergeant vers une limite non nulle, "si (u_n) est une suite strictement positive telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors si $l < 1$, u_n converge vers 0 et si $l > 1$, alors (u_n) diverge vers $+\infty$".)

3 Démonstrations

1. Unicité du symétrique
2. Image du neutre et d'un symétrique par un morphisme de groupe.
3. L'image d'un morphisme de groupes est un sous-groupe.
4. $\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right) = \mathrm{E}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
   N.B. : La méthode vue en cours utilise une division euclidienne.
5. Unicité de la limite d'une suite.
6. Convergence et limte de la somme de deux suites convergentes.

4 Exercices traités en cours

Feuille n°11 : Exercice 1, Exercice 3, Exercice 4, Exercice 5, Exercice 7(1,2), Exercice 8, Exercice 13, Exercice 14
Feuille n°12 : Exercice 1, Exercice 2, Exercice 6, Exercice 9, Exercice 12 (8,10,11,12), Exercice 13, Exercice 16, Exercice 19, Exercice 27, Exercice 28, Exercice 29